

7.5.5 Tečny kružnic I

Př. 1: Je dána kružnice $k([-3;1];\sqrt{10})$ a bod $T[0;2]$. Ověř, že bod T leží na kružnici k .
Najdi tečnu kružnice procházející bodem T .

Dosadíme bod $T[0;2]$: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = (0+3)^2 + (2-1)^2 = 9+1=10 \Rightarrow$ bod T leží na k .

Přímky procházející bodem $T[0;2]$: $(y-2)=k(x-0) \Rightarrow y=kx+2$ a přímka $x=0$.

Dosadíme do středové rovnice kružnice: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = (x+3)^2 + (kx+2-1)^2 = 10$.

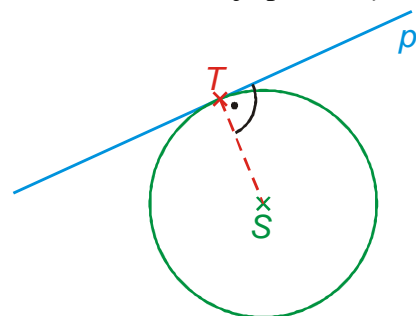
$$(x+3)^2 + (kx+1)^2 = 10 \quad x^2 + 6x + 9 + k^2x^2 + 2kx + 1 = 10$$

$$x^2(1+k^2) + x(6+2k) = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (6+2k)^2 - 4(1+k^2) \cdot 0 = (6+2k)^2 = 0$$

$$6+2k = 0 \Rightarrow k = -3$$

Hledanou tečnou je přímka $y = -3x + 2$, v obecném tvaru $3x + y - 2 = 0$.



Tečna je kolmá na vektor $T - S$, který známe.

Př. 2: Je dána kružnice $k([-3;1];\sqrt{10})$ a bod $T[0;2]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem T využitím kolmosti tečny na vektor $T - S$.

$$T - S = (0 - (-3); 2 - 1) = (3; 1) \Rightarrow \mathbf{n}_t = (3; 1)$$

Obecná rovnice tečny: $3x + y + c = 0$. Na tečně leží bod $T[0;2]$: $3 \cdot 0 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

Hledaná tečná má obecnou rovnici $3x + y - 2 = 0$.

Předchozí postup je možné použít k odvození rovnice tečny zadané pomocí kružnice a bodu, který na ní leží.

Máme kružnici k se středem $S[m;n]$ a poloměrem r a bod $X_0[x_0;y_0]$, který na této kružnici leží (v předchozích příkladech jsme tento bod značili T . Teď označení měníme kvůli shodě s učebnicemi).

Budeme hledat rovnici tečny kružnice k v bodě $X_0 \Rightarrow$ zopakujeme postup z příkladu 2.

Vektor $X_0 - S$ je normálový vektor tečny v bodu X_0 : $X_0 - S = (x_0 - m; y_0 - n) = \mathbf{n}_t$.

Obecná rovnice tečny: $(x_0 - m)x + (y_0 - n)y + c = 0$.

Na tečně leží bod $X_0[x_0;y_0]$: $(x_0 - m)x_0 + (y_0 - n)y_0 + c = 0 \Rightarrow c = -(x_0 - m)x_0 - (y_0 - n)y_0$.

Rovnice tečny: $(x_0 - m)x + (y_0 - n)y - (x_0 - m)x_0 - (y_0 - n)y_0 = 0$.

Výsledek není možné označit za úspěch. Nemá smysl si pamatovat tak složitý vzorec, je jednodušší si odvodit rovnici tečny rovnou konkrétně.

Naštěstí existuje i jednodušší a lépe zapamatovatelný tvar rovnice tečny.

Bod $X_0[x_0;y_0]$ leží na kružnici $k \Rightarrow$ musí vyhovovat její středové rovnici \Rightarrow platí:

$$(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = r^2.$$

Získali jsme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} (x_0 - m)x + (y_0 - n)y - (x_0 - m)x_0 - (y_0 - n)y_0 &= 0 \\ (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 &= r^2 \end{aligned} \quad (\text{rovnice částečně umocníme})$$

$$\begin{aligned} (x_0 - m)x + (y_0 - n)y - x_0^2 + mx_0 - y_0^2 + ny_0 &= 0 \\ x_0^2 - 2mx_0 + m^2 + y_0^2 - 2ny_0 + n^2 &= r^2 \end{aligned} \quad (\text{obě rovnice sečteme})$$

$$(x_0 - m)x + (y_0 - n)y - mx_0 + m^2 - ny_0 + n^2 = r^2 \quad (\text{přerovnáme členy})$$

$$(x_0 - m)x - mx_0 + m^2 + (y_0 - n)y - ny_0 + n^2 = r^2 \quad (\text{vytkneme})$$

$$(x_0 - m)x - m(x_0 - m) + (y_0 - n)y - n(y_0 - n) = r^2 \quad (\text{opět vytkneme})$$

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$$

Středová rovnice kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

Závorky rozložíme na součiny dvojčlenů: $(x - m)(x - m) + (y - n)(y - n) = r^2$.

V každém součinu zaměníme jedno x za x_0 (a jedno y za y_0):

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2.$$

Př. 3: Je dána kružnice $k([-3; 1]; \sqrt{10})$ a bod $T[0; 2]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem T . Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

$$(0 - [-3])(x - [-3]) + (2 - 1)(y - 1) = \sqrt{10}^2$$

$$3(x + 3) + (y - 1) = 10 \quad 3x + 9 + y - 1 = 10 \quad 3x + y - 2 = 0$$

Př. 4: Je dána kružnice $k([-3; 1]; \sqrt{10})$ a bod $T[-6; 0]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem T . Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

$$(-6 - [-3])(x - [-3]) + (0 - 1)(y - 1) = \sqrt{10}^2$$

$$-3(x + 3) - (y - 1) = 10 \quad -3x - 9 - y + 1 = 10 \quad -3x - y - 18 = 0 \quad 3x + y + 18 = 0$$

Př. 5: Je dána kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Najdi tečnu kružnice $A[4; -6]$. Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 20 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25, \quad A[4; -6].$$

$$\begin{aligned} (4 - 1)(x - 1) + (-6 + 2)(y + 2) &= 25 & 3(x - 1) - 4(y + 2) &= 25 & 3x - 3 - 4y - 8 - 25 &= 0 \\ 3x - 4y - 36 &= 0 \end{aligned}$$

Př. 6: Petáková:

strana 129/cvičení 83 c)

strana 130/cvičení 90 b)

strana 131/cvičení 95 a)

strana 131/cvičení 96 a)

strana 131/cvičení 97 a)