7.5.5 Tečny kružnic I

Př. 1: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[0;2]$. Ověř, že bod *T* leží na kružnici *k*. Najdi tečnu kružnice procházející bodem *T*.

Dosadíme bod $T[0;2]$: $(x+3)^2+(y-1)^2=(0+3)^2+(2-1)^2=9+1=10 \Rightarrow$ bod *T* leží na *k*.
Přímky procházející bodem $T[0;2]$: $(y-2)=k(x-0) \Rightarrow y=kx+2$ a přímka $x=0$.
Dosadíme do středové rovnice kružnice: $(x+3)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+(kx+2-1)^2=10$.

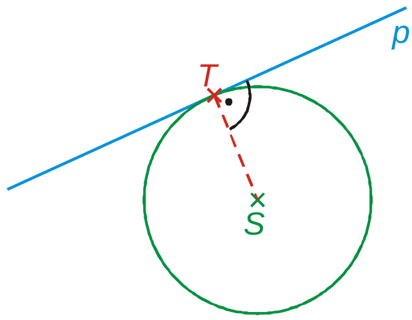
$(x+3)^2+(kx+1)^2=10 \qquad x^2+6x+9+k^2x^2+2kx+1=10$

$x^2\left(1+k^2\right)+x(6+2k)=0$

$D=b^2-4ac=(6+2k)^2-4\left(1+k^2\right)\cdot 0=(6+2k)^2=0$

$6+2k=0 \Rightarrow k=-3$

Hledanou tečnou je přímka $y=-3x+2$, v obecném tvaru $3x+y-2=0$.



Tečna je kolmá na vektor $T-S$, který známe.

Př. 2: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[0;2]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem *T* využitím kolmosti tečny na vektor $T-S$.

$T-S=(0-(-3);2-1)=(3;1) \Rightarrow \boldsymbol{n}_t=(3;1)$
Obecná rovnice tečny: $3x+y+c=0$. Na tečně leží bod $T[0;2]$: $3\cdot 0+2+c=0 \Rightarrow c=-2$.
Hledaná tečná má obecnou rovnici $3x+y-2=0$.

Předchozí postup je možné použít k odvození rovnice tečny zadané pomocí kružnice a bodu, který na ní leží.
Máme kružnici *k* se středem $S[m;n]$ a poloměrem *r* a bod $X_0[x_0;y_0]$, který na této kružnici leží (v předchozích příkladech jsme tento bod značili *T*. Teď označení měníme kvůli shodě s učebnicemi).
Budeme hledat rovnici tečny kružnice *k* v bodě X_0 $\Rightarrow$ zopakujeme postup z příkladu 2.
Vektor X_0-S je normálový vektor tečny v bodu X_0: $X_0-S=(x_0-m;y_0-n)=\boldsymbol{n}_t$.
Obecná rovnice tečny: $(x_0-m)x+(y_0-n)y+c=0$.
Na tečně leží bod $X_0[x_0;y_0]$: $(x_0-m)x+(y_0-n)y+c=0 \Rightarrow c=-(x_0-m)x_0-(y_0-n)y_0$.
Rovnice tečny: $(x_0-m)x+(y_0-n)y-(x_0-m)x_0-(y_0-n)y_0=0$.
Výsledek není možné označit za úspěch. Nemá smysl si pamatovat tak složitý vzorec, je jednodušší si odvodit rovnici tečny rovnou konkrétně.
Naštěstí existuje i jednodušší a lépe zapamatovatelný tvar rovnice tečny.
Bod $X_0[x_0;y_0]$ leží na kružnici *k* $\Rightarrow$ musí vyhovovat její středové rovnici $\Rightarrow$ platí:
$(x_0-m)^2+(y_0-n)^2=r^2$.

Získali jsme soustavu rovnic:

$$(x_0-m)x+(y_0-n)y-(x_0-m)x_0-(y_0-n)y_0=0$$
$$(x_0-m)^2+(y_0-n)^2=r^2$$
(rovnice částečně umocníme)

$$(x_0-m)x+(y_0-n)y-x_0^2+mx_0-y_0^2+ny_0=0$$
$$x_0^2-2mx_0+m^2+y_0^2-2ny_0+n^2=r^2$$
(obě rovnice sečteme)

$$(x_0-m)x+(y_0-n)y-mx_0+m^2-ny_0+n^2=r^2$$ (přerovnáme členy)

$$(x_0-m)x-mx_0+m^2+(y_0-n)y-ny_0+n^2=r^2$$ (vytkneme)

$$(x_0-m)x-m(x_0-m)+(y_0-n)y-n(y_0-n)=r^2$$ (opět vytkneme)

$$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$$

Středová rovnice kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.

Závorky rozložíme na součiny dvojčlenů: $(x-m)(x-m)+(y-n)(y-n)=r^2$.

V každém součinu zaměníme jedno *x* za x_0 (a jedno *y* za y_0):

$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$.

Př. 3: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[0;2]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem *T*. Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

$$(0-[-3])(x-[-3])+(2-1)(y-1)=\sqrt{10}^2$$

$3(x+3)+(y-1)=10$ $\quad$ $3x+9+y-1=10$ $\quad$ $3x+y-2=0$

Př. 4: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[-6;0]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem *T*. Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

$$(-6-[-3])(x-[-3])+(0-1)(y-1)=\sqrt{10}^2$$

$-3(x+3)-(y-1)=10$ $\quad$ $-3x-9-y+1=10$ $\quad$ $-3x-y-18=0$ $\quad$ $3x+y+18=0$

Př. 5: Je dána kružnice $x^2+y^2-2x+4y-20=0$. Najdi tečnu kružnice $A[4;-6]$. Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

$$x^2+y^2-2x+4y-20=x^2-2x\cdot1+1^2-1^2+y^2+2y\cdot2+2^2-2^2-20=0$$

$(x-1)^2+(y+2)^2=25$, $A[4;-6]$.

$(4-1)(x-1)+(-6+2)(y+2)=25$ $\quad$ $3(x-1)-4(y+2)=25$ $3x-3-4y-8-25=0$

$3x-4y-36=0$

Př. 6: Petáková:
strana 129/cvičení 83 c)
strana 130/cvičení 90 b)
strana 131/cvičení 95 a)
strana 131/cvičení 96 a)
strana 131/cvičení 97 a)