7.5.5 Tečny kružnic I

Předpoklady: 4501, 4504

Pedagogická poznámka: Následující dvě hodiny jsou na gymnázium asi početně nejnáročnější. Ačkoliv jsou příklady optimalizované na co nejmenší početní obtížnost, všichni studenti nedokáží dopočítat kompletní obsah celých hodin. Kontroly provádíme po částech příkladů. Pokud někdo nestíhá, trvám na tom, že nejhorší úseky nebude opisovat, vynechá si místo v sešitě, a tak mu zbude čas na úseky, které mají význam z hlediska pochopení smyslu příkladů.

Pedagogická poznámka: Nemůžu si pomoc, ale jako autor si musím postěžovat, že zcela nechápu náklonnost české středoškolské matematiky k tečnám kuželoseček i kuželosečkám obecně. Určitě bych se bez této hodiny obešel, ale tlak okolí nedá jinak.

Pedagogická poznámka: Před předchozím příkladem nedávám studentům příliš času na rozmyšlenou a rovnou se jim snažím vnutit použitý postup s parametrem. Na vymýšlení lepších variant budou mít čas po vypočtení příkladu.

Př. 1: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[0;2]$. Ověř, že bod T leží na kružnici k. Najdi tečnu kružnice procházející bodem T.

Pokud bod T leží na kružnici k, musí vyhovovat její rovnici.

Středová rovnice kružnice k: $(x+3)^2+(y-1)^2=10$.

Dosadíme bod $T[0;2]$: $(x+3)^2+(y-1)^2=(0+3)^2+(2-1)^2=9+1=10 \Rightarrow$ bod T leží na k.

Co víme o hledané tečně: prochází bodem T, ale neznáme směr (ten zjistíme z toho, že je tečnou) $\Rightarrow$ zapíšeme pomocí parametru ve směrnicovém tvaru všechny přímky procházející bodem T a vybereme tečnu podle toho, že má s kružnicí k jediný průsečík.

Přímky procházející bodem $T[0;2]$: $(y-2)=k(x-0) \Rightarrow y=kx+2$ a přímka $x=0$.

Dosadíme do středové rovnice kružnice: $(x+3)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+(kx+2-1)^2=10$.

$(x+3)^2+(kx+1)^2=10$

$x^2+6x+9+k^2x^2+2kx+1=10$

$x^2\left(1+k^2\right)+x(6+2k)=0$

Počet řešení závisí na hodnotě diskriminantu. Hledáme tečnu $\Rightarrow$ chceme jediný průsečík $\Rightarrow$ jediné řešení $\Rightarrow$ zjišťujeme, kdy je nulový diskriminant (zbytek vzorce nás nezajímá).

$D=b^2-4ac=(6+2k)^2-4\left(1+k^2\right)\cdot 0=(6+2k)^2=0$

$6+2k=0 \Rightarrow k=-3$

Hledanou tečnou je přímka $y=-3x+2$, v obecném tvaru $3x+y-2=0$.

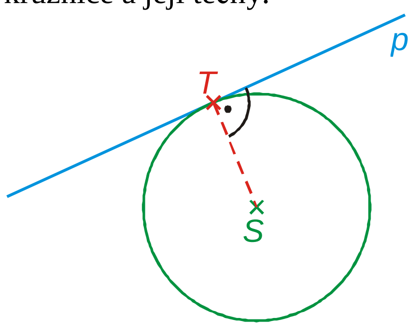
Dodatek: Na předchozím příkladu je možné dokumentovat, jak těsně souvisí řešitelnost rovnic s tím, co znamenají. Bod T leží na kružnici $k \Rightarrow$ každá přímka, která přes něj prochází má s kružnicí minimálně jeden společný bod. Diskriminantem rovnice $x^2\left(1+k^2\right)+x\left(6+2k\right)=0$ je výraz $D=\left(6+2k\right)^2$, který je vždy nezáporný.

Dodatek: Ověřit, že bod *T* leží na kružnici *k*, můžeme také tím, že spočteme vzdálenost $|ST|$, která by se měla rovnat poloměru kružnice.

Předchozí postup rozhodně není jednoduchý. Výpočet významně ulehčilo předem připravené zadání, ve kterém byla *x*-ová souřadnice tečného bodu nulová (masochističtí zájemci si mohou zkusit vypočítat tečnu v bodě $T[-6;0]$. Hodnota směrnice bude stejná, ale výpočet podstatně složitější).
Na druhou stranu jde o obecně použitelný postup, který funguje:

- u bodů, které leží na kružnici, i bodů, které leží mimo ni,
- nejen u kružnic, ale i u ostatních kuželoseček.

Najdeme rychlejší postup. Stačí si vzpomenout na obrázek ukazují vzájemnou polohu kružnice a její tečny.



Tečna je kolmá na vektor $T-S$, který známe.

Př. 2: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[0;2]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem *T* využitím kolmosti tečny na vektor $T-S$.

Vektor $T-S$ je normálový vektor tečny v bodu *T*.
$T-S=\left(0-(-3);2-1\right)=(3;1)\Rightarrow \boldsymbol{n}_t=(3;1)$
Obecná rovnice tečny: $3x+y+c=0$.
Na tečně leží bod $T[0;2]$: $3\cdot 0+2+c=0\Rightarrow c=-2$.
Hledaná tečná má obecnou rovnici $3x+y-2=0$. (Stejný výsledek jako v předchozím příkladě.)

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají problém s kolmostí vektoru a neuvědomí si, že vektor $T-S$ je přímo normálovým vektorem, který hledají do obecné rovnice. Čímž jsme opět u přímkové smršti.

Pedagogická poznámka: Následující odvození studenti do sešitu neopisují. Převedu ho pouze na tabuli s tím, že studenti mají za úkol pouze sledovat, co dělám. Pokud nezbývá do konce alespoň 15 minut, odvození přeskakuji.

Předchozí postup je možné použít k odvození rovnice tečny zadané pomocí kružnice a bodu, který na ní leží.

Máme kružnici *k* se středem $S[m;n]$ a poloměrem *r* a bod $X_0[x_0;y_0]$, který na této kružnici leží (v předchozích příkladech jsme tento bod značili *T*. Teď označení měníme kvůli shodě s učebnicemi).
Budeme hledat rovnici tečny kružnice *k* v bodě X_0 $\Rightarrow$ zopakujeme postup z příkladu 2.
Vektor X_0-S je normálový vektor tečny v bodu X_0: $X_0-S=(x_0-m;y_0-n)=\boldsymbol{n}_t$.
Obecná rovnice tečny: $(x_0-m)x+(y_0-n)y+c=0$.
Na tečně leží bod $X_0[x_0;y_0]$: $(x_0-m)x+(y_0-n)y+c=0 \Rightarrow c=-(x_0-m)x_0-(y_0-n)y_0$.
Rovnice tečny: $(x_0-m)x+(y_0-n)y-(x_0-m)x_0-(y_0-n)y_0=0$.

Výsledek není možné označit za úspěch. Nemá smysl si pamatovat tak složitý vzorec, je jednodušší si odvodit rovnici tečny rovnou konkrétně.

Naštěstí existuje i jednodušší a lépe zapamatovatelný tvar rovnice tečny.
Bod $X_0[x_0;y_0]$ leží na kružnici *k* $\Rightarrow$ musí vyhovovat její středové rovnici $\Rightarrow$ platí:
$(x_0-m)^2+(y_0-n)^2=r^2$.
Získali jsme soustavu rovnic:

$$(x_0-m)x+(y_0-n)y-(x_0-m)x_0-(y_0-n)y_0=0$$
$$(x_0-m)^2+(y_0-n)^2=r^2$$

(rovnice částečně umocníme)

$$(x_0-m)x+(y_0-n)y-x_0^2+mx_0-y_0^2+ny_0=0$$
$$x_0^2-2mx_0+m^2+y_0^2-2ny_0+n^2=r^2$$

(obě rovnice sečteme)

$$(x_0-m)x+(y_0-n)y-mx_0+m^2-ny_0+n^2=r^2$$ (přerovnáme členy)

$$(x_0-m)x-mx_0+m^2+(y_0-n)y-ny_0+n^2=r^2$$ (vytkneme)

$$(x_0-m)x-m(x_0-m)+(y_0-n)y-n(y_0-n)=r^2$$ (opět vytkneme)

$$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$$

Tečna kružnice $k([m;n];r)$ procházející bodem $X_0[x_0;y_0]$, který na této kružnici leží, má rovnici $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$.

Získaný tvar je daleko lépe zapamatovatelný zvláště, když si uvědomíme, jak jej lze snadno získat ze středové rovnice kružnice:
Středová rovnice kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.
Závorky rozložíme na součiny dvojčlenů: $(x-m)(x-m)+(y-n)(y-n)=r^2$.
V každém součinu zaměníme jedno *x* za x_0 (a jedno *y* za y_0):
$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$.

Dodatek: Záměna *x* za x_0 (a *y* za y_0) splňuje i jeden z požadavků na rovnici tečny.
V rovnici $(x-m)(x-m)+(y-n)(y-n)=r^2$ jsou neznámé *x* a *y* v druhé mocnině. Tečna je však přímkou, kde jsou neznámé pouze v první mocnině, čehož

dosáhneme, když v jedné ze závorek nahradíme neznámou *x*, hodnotou *x*-ové souřadnice tečného bodu (tedy číslem).

Dodatek: Náš tvar rovnice tečny vycházel ze středové rovnice kružnice. Stejně tak je možné odvodit rovnici tečny, která vychází z obecné rovnice. Jde o rovnici:
$x_0x + y_0y - m(x + x_0) - n(y + y_0) + p = 0$.
Z obecné rovnice ji získáme takto:
Obecná rovnice kružnice: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$.
Rovnici upravíme: $x \cdot x + y \cdot y - m(x + x) - n(y + y) + p = 0$.
V každém součinu nebo součtu nahradíme *x* nebo *y*:
$x_0x + y_0y - m(x + x_0) - n(y + y_0) + p = 0$
Rovnici nepovažuji vhodnou za zapamatování, zbytečně se plete s rovnicí vycházející ze středové rovnice a není problém převést obecnou rovnici kružnice na středovou.

Př. 3: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[0;2]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem *T*. Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

Stačí dosadit a upravit získanou rovnici: $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$.

$(0 - [-3])(x - [-3]) + (2 - 1)(y - 1) = \sqrt{10}^2$

$3(x + 3) + (y - 1) = 10$

$3x + 9 + y - 1 = 10$

$3x + y - 2 = 0$

Pedagogická poznámka: Pokud mají studenti s dosazením problémy, je dobré ověřit, zda vůbec chápou, která písmena v rovnici znamenají číselné konstanty a která proměnné. Někteří studenti dokonce nerozlišují mezi *x* a x_0 a dosadí do rovnice čísla za všechna písmenka.

Př. 4: Je dána kružnice $k\left([-3;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $T[-6;0]$. Najdi tečnu kružnice procházející bodem *T*. Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

Stačí dosadit a upravit získanou rovnici: $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$.

$(-6 - [-3])(x - [-3]) + (0 - 1)(y - 1) = \sqrt{10}^2$

$-3(x + 3) - (y - 1) = 10$

$-3x - 9 - y + 1 = 10$

$-3x - y - 18 = 0$

$3x + y + 18 = 0$

Př. 5: Je dána kružnice $x^2+y^2-2x+4y-20=0$. Najdi tečnu kružnice $A[4;-6]$. Při řešení využij odvozenou rovnici tečny.

Vzorec pro tečnu vychází ze středové rovnice kružnice $\Rightarrow$ musíme zadanou rovnici převést na středový tvar.

$x^2+y^2-2x+4y-20=x^2-2x\cdot1+1^2-1^2+y^2+2y\cdot2+2^2-2^2-20=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=25$, $A[4;-6]$.

Dosazení do tvaru: $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$.

$(4-1)(x-1)+(-6+2)(y+2)=25$

$3(x-1)-4(y+2)=25$

$3x-3-4y-8-25=0$

$3x-4y-36=0$

Př. 6: Petáková:
strana 129/cvičení 83 c)
strana 130/cvičení 90 b)
strana 131/cvičení 95 a)
strana 131/cvičení 96 a)
strana 131/cvičení 97 a)

Shrnutí: Tečnu kružnice můžeme najít pomocí počtu průsečík parametricky nebo využitím speciálních vlastností.