7.5.4 Kružnice a přímka

Př. 1: Sepiš všechny možné vzájemné polohy kružnice a přímky. Ke každému případu nakresli obrázek. Co v každém případě platí pro vzdálenost přímky od středu kružnice?

Př. 2: Najdi průsečíky kružnice $x^2+y^2-4x-2y=0$ a přímky $x+3y=0$. Jaká je jejich vzájemná poloha? Ověř, zda platí pravidlo pro vzdálenost přímky od středu kružnice napsané v předcházejícím příkladě.

Vyjádřím: $x+3y=0 \Rightarrow x=-3y$ a dosadím do první rovnice:

$x^2+y^2-4x-2y=(-3y)^2+y^2-4(-3y)-2y=0$

$y(y+1)=0 \;\Rightarrow P_1[0;0],\; P_1[3;-1]$

$\Rightarrow$ dva průsečíky$\Rightarrow$ přímka $x+3y=0$ je sečnou kružnice $x^2+y^2-4x-2y=0$.

Ověříme zda platí pravidlo pro vzdálenost přímky od středu kružnice.

$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \;\Rightarrow\; r=\sqrt{5}$

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\cdot 2+3\cdot 1+0|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{2}.$$

Př. 3: Už ze zadání předchozího příkladu je na první pohled zřejmé, že přímka $x+3y=0$ má s kružnicí $x^2+y^2-4x-2y=0$ nejméně jeden společný bod. Proč?

Př. 4: Urči vzájemnou polohu kružnice $x^2+y^2+6x-2y+2=0$ a přímky $x+y+c=0$ v závislosti na hodnotě parametru *c*. Ještě než začneš příklad řešit početně, nakresli si náčrtek a co nejpřesněji odhadni, jak bude početní řešení příkladu vypadat.

Vyjádřím z druhé rovnice: $x+y+c=0 \Rightarrow y=-x-c$ a dosadím do první rovnice:

$x^2+y^2+6x-2y+2=x^2+(-x-c)^2+6x-2(-x-c)+2=0$

$2x^2+2xc+8x+c^2+2c+2=0 \;\Rightarrow$ kvadratická rovnice s parametrem

$$x_{1,2}=\frac{-(2c+8)\pm\sqrt{(2c+8)^2-4\cdot 2\cdot(c^2+2c+2)}}{2\cdot 2}=\frac{-c-4\pm\sqrt{-(c^2-4c-12)}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2c-8\pm 2\sqrt{-(c^2-4c-12)}}{4}=\frac{-c-4\pm\sqrt{-(c^2-4c-12)}}{2}$$

„obrácená“ parabola, průsečíky pro $c=6$ a $c=-2$

1. $c\in(-2;6) \;\Rightarrow$ diskriminant rovnice $D=-(c^2-4c-12)>0$

2. $c=-2$ nebo $c=6 \;\Rightarrow$ diskriminant rovnice $D=-(c^2-4c-12)=0$

$\Rightarrow\; T_1[-5;-1] \;\Rightarrow\; T_2[-1;3]$

Př. 5: (BONUS a navíc trochu zavádějící) Obrázek v rozboru je nakreslen přesně podle skutečných souřadnic zadané kružnice a přímky. Z obrázku je vidět, že tečny kružnice je možné napsat ve směrnicovém tvaru jako $y = x + 2$ a $y = x - 6$. Hodnoty absolutních členů jsou pak opačné než ty, které vyšly v předchozím příkladu. Vysvětli rozpor.

Př. 6: Najdi kružnici se středem v bodě $S[2;-1]$, která na přímce $p: x - 2y + 1 = 0$ vytkne tětivu o délce $4\sqrt{5}$.

Kolmice na sečnu, procházející středem kružnice rozdělí tětivu na dvě stejné poloviny. velikost strany $|PP_2|$ je rovna vzdálenosti polovině tětivy ze zadání, tedy $2\sqrt{5}$

$$|SP| = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|SP_2| = \sqrt{|PP_2|^2 + |SP|^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Podmínky zadání splňuje kružnice $k([2;-1];5)$ se středovou rovnicí $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Př. 7: Urči vzájemnou polohu kružnic $k_1([-5;-3];5)$ a $k_2([1;-1];\sqrt{5})$. Pokud mají kružnice nějaké průsečíky urči jejich souřadnice.

$$|S_1S_2| = \sqrt{(-5-1)^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \doteq 6{,}32 \text{ , } r_1 + r_2 = 5 + \sqrt{5} \doteq 7{,}24$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 5$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 6y = -9$$

$$3x + y = -3 \Rightarrow y = -3x - 3$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 6y = x^2 + (-3x-3)^2 + 10x + 6(-3x-3) = -9$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -3 - 3x = -3 - 3 \cdot 0 = -3 \Rightarrow P_1[0;-3]$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_1 = -3 - 3x_1 = -3 - 3 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow P_2[-1;0]$$

Zadané kružnice se protínají ve dvou bodech $P_1[0;-3]$ a $P_2[-1;0]$.