

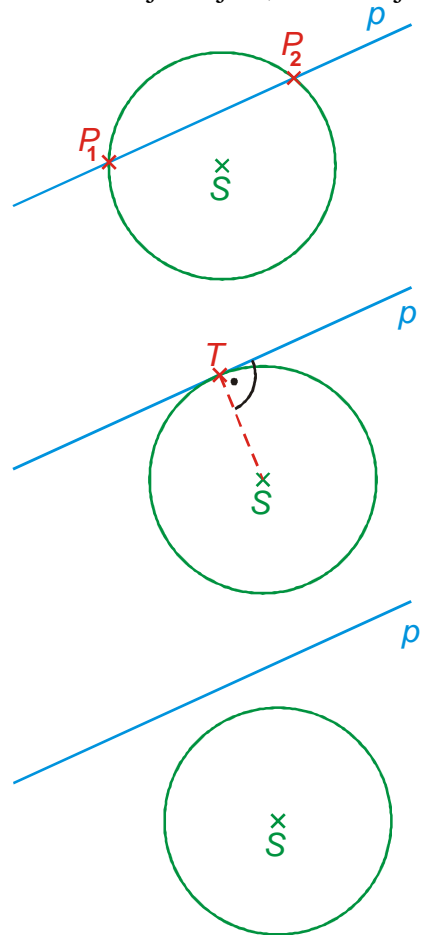
7.5.4 Kružnice a přímka

Předpoklady: 7501,

Pedagogická poznámka: Rychlost postupu v této hodině velmi závisí na tom, jakým způsobem studenti řešili kvadratické rovnice s parametrem. Pokud je vůbec nepočítali, nemá samostatné počítání příkladu 4 vůbec smysl. Nemá smysl ho počítat ani na tabuli, protože výpočet stejně nebude skoro nikdo schopný sledovat. Pokud vše půjde dobře, máte šanci obsah stihnout tak v 60 minutách.

Př. 1: Sepiš všechny možné vzájemné polohy kružnice a přímky. Ke každému případu nakresli obrázek. Co v každém případě platí pro vzdálenost přímky od středu kružnice?

Z obrázků je zřejmé, že existují tři případy vzájemné polohy kružnice a přímky:



- Přímka se protíná s kružnicí ve dvou různých bodech.
 - Říkáme, že přímka je **sečnou** kružnice.
 - Vzdálenost přímky od středu kružnice je menší než poloměr kružnice.
-
- Přímka se protíná s kružnicí právě v jednom bodě.
 - Říkáme, že přímka je **tečnou** kružnice.
 - Vzdálenost přímky od středu kružnice je rovna poloměru kružnice.
-
- Přímka se neprotíná s kružnicí v žádném bodě.
 - Říkáme, že přímka je **vnější přímkou** kružnice.
 - Vzdálenost přímky od středu kružnice je větší než poloměr kružnice.

Př. 2: Najdi průsečíky kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ a přímky $x + 3y = 0$. Jaká je jejich vzájemná poloha? Ověř, zda platí pravidlo pro vzdálenost přímky od středu kružnice napsané v předcházejícím příkladě.

Hledáme průsečíky přímky s kružnicí \Rightarrow body, které vyhovují oběma rovnicím \Rightarrow řešíme

$$\text{soustavu rovnic } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Vyjádříme $x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y$ a dosadíme do první rovnice.

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = (-3y)^2 + y^2 - 4(-3y) - 2y = 0$$

$$9y^2 + y^2 + 12y - 2y = 0$$

$$10y^2 + 10y = 0$$

$$y^2 + y = 0$$

$$y(y+1) = 0$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -3y_1 = 0 \Rightarrow P_1[0;0]$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -3y_1 = 3 \Rightarrow P_1[3;-1]$$

\Rightarrow Dva průsečíky \Rightarrow přímka $x + 3y = 0$ je sečnou kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

Ověříme, zda platí pravidlo pro vzdálenost přímky od středu kružnice.

Určíme poloměr kružnice \Rightarrow potřebujeme středovou rovnici:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 =$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

Určíme vzdálenost středu kružnice $S[2;1]$ od přímky $x + 3y = 0$:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{2}$$

Protože $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ platí i $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5} < \sqrt{5} \Rightarrow$ vzdálenost přímky od středu kružnice je menší než její poloměr.

Pedagogická poznámka: Největším problémem předchozího příkladu je vzorec pro vzdálenost bodu od přímky. I když ho napíšete na tabuli, budou mít někteří obrovské problémy s dosazením.

Dodatek: Že existují tři možné vzájemné polohy přímky a kružnice je zřejmé i z početního řešení. Po dosazení z rovnice přímky do rovnice kružnice získáme kvadratickou rovnici. Její řešení může skončit třemi různými způsoby:

2. kořeny \Rightarrow sečna,

1. kořen \Rightarrow tečna,

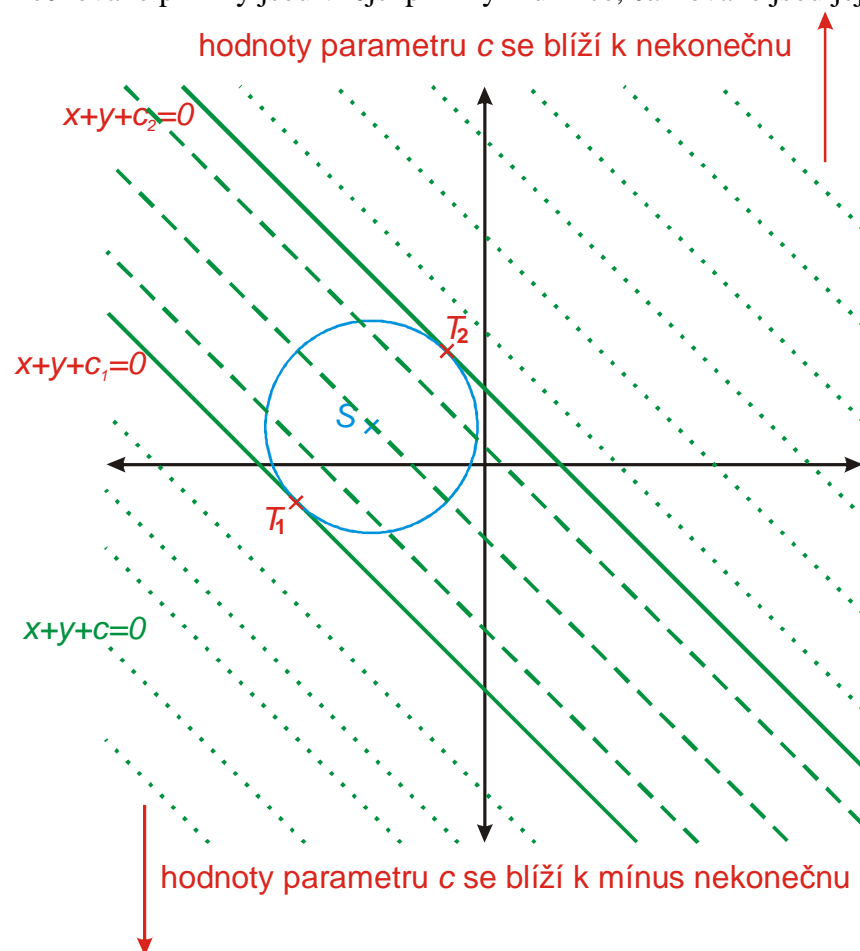
žádný kořen \Rightarrow vnější přímka.

Př. 3: Už ze zadání předchozího příkladu je na první pohled zřejmé, že přímka $x + 3y = 0$ má s kružnicí $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ nejméně jeden společný bod. Proč?

V obou rovnicích chybí absolutní člen (člen bez x a bez y) \Rightarrow oběma rovnicím určitě vyhovuje bod $[0;0]$, který je jistým průsečíkem kružnice s přímkou.

Př. 4: Urči vzájemnou polohu kružnice $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$ a přímky $x + y + c = 0$ v závislosti na hodnotě parametru c . Ještě než začneš příklad řešit početně, nakresli si náčrtek a co nejpřesněji odhadni, jak bude početní řešení příkladu vypadat.

Při změnách hodnoty parametru c se přímka pohybuje ve svislém směru, její směr se nemění. Při nižších hodnotách parametru se přímka nachází níže, při vyšších výše. Tečkované přímky jsou vnější přímky kružnice, čárkované jsou její sečny a plně tečny.



Z obrázku vidíme, že nastanou celkem tři případy (postupně od nejmenších hodnot parametru c):

- $c \in (-\infty; c_1)$ nebo $c \in (c_2; \infty)$ - přímka se s kružnicí neprotíná, je její vnější přímkou.
- $c = c_1$ nebo $c = c_2$ - přímka je tečnou kružnice.
- $c \in (c_1; c_2)$ - přímka protíná kružnici ve dvou bodech, je její sečnou.

Nyní řešíme příklad početně.

Hledáme průsečíky přímky s kružnicí \Rightarrow body, které vyhovují oběma rovnicím \Rightarrow řešíme

soustavu rovnic
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 &= 0 \\ x + y + c &= 0\end{aligned}$$
 \Rightarrow stejný postup jako v příkladě 2, jen to bude

trochu komplikovat parametr.

Vyjádríme z druhé rovnice: $x + y + c = 0 \Rightarrow y = -x - c$ a dosadíme do první rovnice:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = x^2 + (-x - c)^2 + 6x - 2(-x - c) + 2 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2xc + c^2 + 6x + 2x + 2c + 2 = 0$$

$2x^2 + 2xc + 8x + c^2 + 2c + 2 = 0 \Rightarrow$ kvadratická rovnice s parametrem.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2c+8) \pm \sqrt{(2c+8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c^2 + 2c + 2)}}{2 \cdot 2}$$

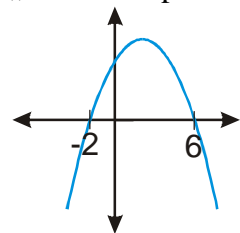
$$x_{1,2} = \frac{-2c - 8 \pm \sqrt{4c^2 + 32c + 64 - 8c^2 - 16c - 16}}{4} = \frac{-2c - 8 \pm \sqrt{16c + 48 - 4c^2}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2c - 8 \pm 2\sqrt{-(c^2 - 4c - 12)}}{4} = \frac{-c - 4 \pm \sqrt{-(c^2 - 4c - 12)}}{2}$$

O existenci kořenů rozhoduje znaménko výrazu pod odmocninou \Rightarrow řešíme nerovnici

$$-(c^2 - 4c - 12) = -(c - 6)(c + 2) \geq 0.$$

„obrácená“ parabola, průsečíky pro $c = 6$ a $c = -2$.



Z obrázku je vidět, že mohou nastat tři možnosti:

1. $c \in (-2; 6) \Rightarrow$ Diskriminant rovnice $D = -(c^2 - 4c - 12) > 0$.

Rovnice pro nalezení průsečíků kružnice s přímkou má dva kořeny \Rightarrow kružnice se protíná s přímkou ve dvou bodech, přímka je její sečnou.

2. $c = -2$ nebo $c = 6 \Rightarrow$ Diskriminant rovnice $D = -(c^2 - 4c - 12) = 0$.

Rovnice pro nalezení průsečíků kružnice s přímkou má jeden kořen \Rightarrow kružnice se protíná s přímkou v jednom bodě, přímka je její tečnou.

Tečné body můžeme spočítat:

- $c = 6 \quad x_{1,2} = \frac{-6 - 4 \pm 0}{2} = -5 \Rightarrow y = -x - c = -(-5) - 6 = -1 \Rightarrow T_1[-5; -1]$

- $c = -2 \quad x_{1,2} = \frac{-(-2) - 4 \pm 0}{2} = -1 \Rightarrow y = -x - c = -(-1) - (-2) = 3 \Rightarrow T_2[-1; 3]$

3. $c \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty) \Rightarrow$ Diskriminant rovnice $D = -(c^2 - 4c - 12) < 0$.

Rovnice pro nalezení průsečíků kružnice s přímkou nemá žádný kořen \Rightarrow kružnice se s přímkou neprotíná, přímka je její vnější přímkou.

Pedagogická poznámka: Zadání příkladu bylo úmyslně zvoleno tak, aby nepřinášelo početní komplikace. Je nutné příklad kontrolovat v několika krocích (po rozboru, po výpočtu rovnice až k získání diskriminantu, po vyřešení kvadratické rovnice a

závěr). Zejména dopočítávání tečným bodů (použití správné hodnoty parametru c) vyžaduje dobrou orientaci v příkladu.

Pedagogická poznámka: Není reálné očekávat, že by většina studentů byla schopna bez chyby dopočítat příklad (pokud nepočítali samostatně rovnice s parametrem, je to podle mě naprosto vyloučené). Kvůli průběžné kontrole je potřeba, aby studenti v lavicích provedli stejné dosazení jako je v učebnici $y = -x - c$, i když je samozřejmě jedno, jestli dosadí takto nebo obráceně $x = -y - c$.

Př. 5: Předchozí příklad je po provedení rozboru možné vyřešit i podstatně jednodušeji. Najdi tento způsob řešení.

Z obrázku vidíme, že nastanou celkem tři případy (postupně od nejmenších hodnot parametru c):

- $c \in (-\infty; c_1)$ nebo $c \in (c_2; \infty)$ - přímka se s kružnicí neprotíná, je její vnější přímkou.
- $c = c_1$ nebo $c = c_2$ - přímka je tečnou kružnice.
- $c \in (c_1; c_2)$ - přímka protíná kružnici ve dvou bodech, je její sečnou.

Stačí, pokud najdeme hodnoty c_1 a $c_2 \Rightarrow$ hledáme hodnoty parametru v obecné rovnici přímky, pro které je vzdálenost přímky od středu kružnice stejná jako poloměr kružnice.

Musíme najít středovou rovnici kružnice: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$.

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 2 =$$

$$= (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow S[-3;1], r = 2\sqrt{2}$$

Hledáme přímky ve tvaru $x + y + c = 0$, které jsou od bodu $S[-3;1]$ vzdáleny $r = 2\sqrt{2}$.

Dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky: $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(-3) + 1 \cdot 1 + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$

$$\frac{|-3 + 1 + c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad / \cdot \sqrt{2}$$

$$|c - 2| = 4 \Rightarrow \text{Hledáme čísla vzdálená od čísla 2 o 4} \Rightarrow c_1 = 6, c_2 = -2.$$

Dále už stejně jako v předchozím příkladu.

Př. 6: (BONUS a navíc trochu zavádějící) Obrázek v rozboru je nakreslen přesně podle skutečných souřadnic zadané kružnice a přímky. Z obrázku je vidět, že tečny kružnice je možné napsat ve směrnicevém tvaru jako $y = x + 2$ a $y = x - 6$. Hodnoty absolutních členů jsou pak opačné než ty, které vyšly v předchozím příkladu. Vysvětlí rozpor.

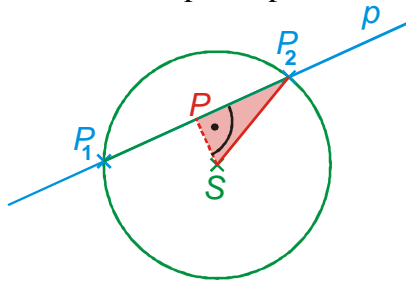
Jde o primitivní chyták.

Přímka byla v předchozím příkladu zadána ve tvaru $x + y + c = 0$.

Po úpravě do směrnicevého tvaru získáme rovnici: $y = -x - c$, kde je znaménko absolutního členu samozřejmě opačné než v původní rovnici.

Př. 7: Najdi kružnici se středem v bodě $S[2; -1]$, která na přímce $p: x - 2y + 1 = 0$ vytkne tětivu o délce $4\sqrt{5}$.

Musíme určit pouze poloměr kružnice. Nakreslíme obrázek situace:



Kolmice na sečnu procházející středem kružnice rozdělí tětivu na dvě stejné poloviny. Získáme tak pravoúhlý trojúhelník SPP_2 . Potřebujeme určit přeponu $|SP_2|$, která je zároveň poloměrem kružnice. Zbývající dvě strany známe:

- Velikost strany $|PP_2|$ je rovna polovině délky tětivy \Rightarrow ze zadání $|PP_2| = 2\sqrt{5}$.
- Velikost strany $|SP|$ je rovna vzdálenosti přímky $p: x - 2y + 1 = 0$ od středu kružnice

$$S[2; -1] \Rightarrow |SP| = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Vypočteme přeponu: $|SP_2|^2 = |PP_2|^2 + |SP|^2$.

$$|SP_2| = \sqrt{|PP_2|^2 + |SP|^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$$

Podmínky zadání splňuje kružnice $k([2; -1]; 5)$ se středovou rovnicí $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Př. 8: Urči vzájemnou polohu kružnic $k_1([-5; -3]; 5)$ a $k_2([1; -1]; \sqrt{5})$. Pokud mají kružnice nějaké průsečíky, urči jejich souřadnice.

Vzájemná poloha kružnic závisí na vzdálenosti jejich středů a jejich poloměrech.

$$|S_1S_2| = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (-3 - (-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \doteq 6,32$$

$r_1 + r_2 = 5 + \sqrt{5} \doteq 7,24 \Rightarrow$ Vzdálenost mezi středy je menší než součet poloměrů obou kružnic \Rightarrow kružnice se musí protínat ve dvou bodech.

Průsečíky zjistíme jako body, které vyhovují rovnicím obou kružnic:

$$k_1: (x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$k_2: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

$$\underline{x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = 25}$$

$$\underline{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 5}$$

$$\underline{x^2 + y^2 + 10x + 6y = -9}$$

$$\underline{x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3}$$

$$\underline{x^2 + y^2 + 10x + 6y = -9}$$

$$\underline{[1] - [2]} \quad 12x + 4y = -12 \quad /: 4$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 6y = -9$$

$$3x + y = -3 \Rightarrow y = -3x - 3$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 6y = x^2 + (-3x - 3)^2 + 10x + 6(-3x - 3) = -9$$

$$x^2 + 9x^2 + 18x + 9 + 10x - 18x - 18 = -9$$

$$10x^2 + 10x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -3 - 3x = -3 - 3 \cdot 0 = -3 \Rightarrow P_1[0; -3]$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_1 = -3 - 3x_1 = -3 - 3 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow P_2[-1; 0]$$

Zadané kružnice se protínají ve dvou bodech $P_1[0; -3]$ a $P_2[-1; 0]$.

Př. 9: Petáková:

strana 129/cvičení 82 b)

strana 129/cvičení 84 a)

strana 130/cvičení 85

strana 130/cvičení 86

Shrnutí: Průsečíky kružnic s jinými útvary se hledají stejně jako průsečíky přímek řešením soustav rovnic.