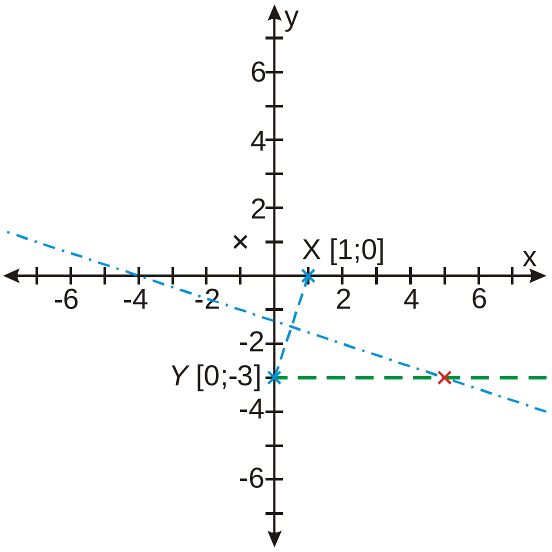
7.5.3 Hledání kružnic II

Př. 1: Najdi kružnici, která se dotýká osy y v bodě $Y[0;-3]$ a osu x protíná v bodě $X[1;0]$. Urči její další průsečík s osou x.



$S_{XY}\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$, $\boldsymbol{u} = X - Y = (1;3) = \boldsymbol{n}_o$.

Osa úsečky XY: $x+3y+4=0$.

$y=-3 \Rightarrow$

$x+3y+4 = x+3\cdot(-3)+4 = 0 \Rightarrow x=5$.

$S[5;-3]$.

Rovnice kružnice: $(x-5)^2+(y+3)^2=25$.

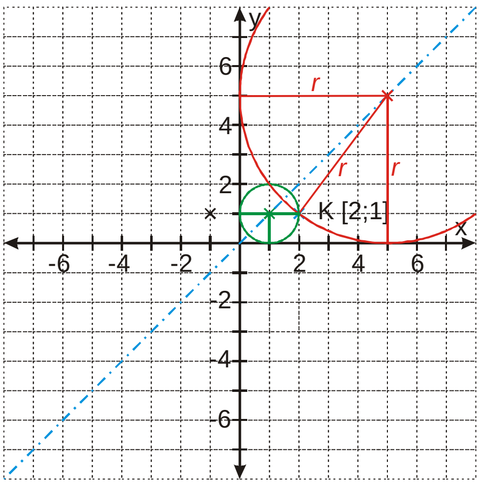
$(x-5)^2+(y+3)^2 = (x-5)^2+(0+3)^2 = 25$

$x^2-10x+25=16$

$x^2-10x+9=0$

$X_1[1;0]$ $X_2[9;0]$.

Př. 2: Najdi rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y a prochází bodem $K[2;1]$.



$|Sy| = |SK|$

$|x| = \sqrt{(x-k_1)^2+(x-k_2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(x-1)^2}$

$|x| = \sqrt{(x-2)^2+(x-1)^2} \quad /^2$

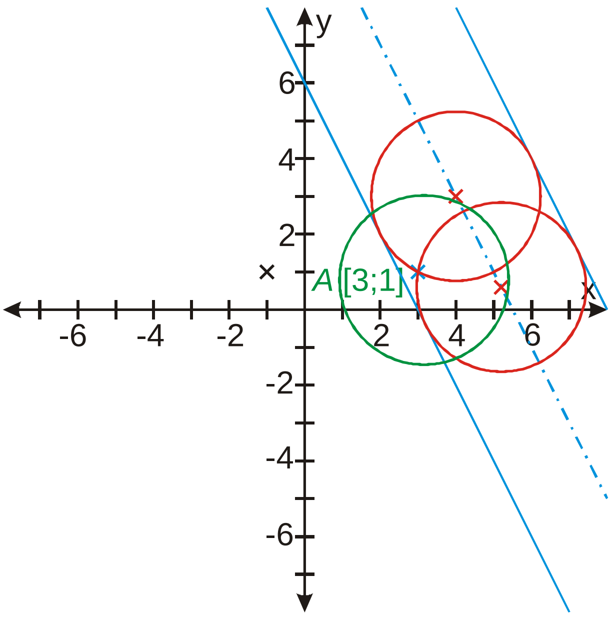
$x^2 = x^2-4x+4+x^2-2x+1 \quad x^2-6x+5=0$

$(x-5)(x-1)=0$

$x_1=5 \Rightarrow S_1[5;5] \Rightarrow (x-5)^2+(y-5)^2=25$

$x_2=1 \Rightarrow S_2[1;1] \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1$

Př. 3: Najdi kružnici, která se dotýká přímek $p_1: 2x+y-6=0$, $p_2: 2x+y-16=0$ a prochází bodem $A[3;1]$.



Osa pásu: $2x+y-11=0$.

Poloměr kružnice: Vzdálenost bodu P od přímky

$p_2: |Pp_2| = \frac{|2\cdot 3+0-16|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow r=\sqrt{5}$.

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{5}$ (dosadíme $y=11-2x$)

$(x-3)^2+(10-2x)^2 = 5 \quad 5x^2-46x+104=0$

$x_1 = \frac{46+6}{10} = \frac{52}{10} = \frac{26}{5} \quad \Rightarrow S_1\left[\frac{26}{5};\frac{3}{5}\right]$

$x_2 = \frac{46-6}{10} = \frac{40}{10} = 4 \Rightarrow S_2[4;3]$

Př. 4: V rovině jsou dány body $A[-1;-3]$, $B[3;-1]$. Najdi výpočtem množinu všech bodů X takových, aby úhel $\sphericalangle AXB$ byl pravý.

a) Úhel $\sphericalangle AXB$ je pravý, právě když vektory $X-A$ a $X-B$ jsou na sebe kolmé.

$X-A=(x+1;y+3)$ $\quad X-B=(x-3;y+1)$ $\quad (X-A)(X-B)=0$.

$(x+1)(x-3)+(y+3)(y+1)=0$ $\quad x^2-3x+x-3+y^2+3y+y+3=0$

$x^2-2x+y^2+4y=0$ $\quad x^2-2x\cdot 1+1^2-1^2+y^2+2y\cdot 2+2^2-2^2=(x-1)^2+(y+2)^2-5=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=5 \Rightarrow S[1;-2]$, $r=\sqrt{5}$

b) Úhel $\sphericalangle AXB$ je pravý, právě když pro strany trojúhelníku *ABX* platí Pythagorova věta. $|AX|^2+|BX|^2=|AB|^2$ $\quad |AX|=\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}$ $\quad |BX|=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$

$|AB|=\sqrt{(-1-3)^2+(-3-[-1])^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $\quad (x+1)^2+(y+3)^2+(x-3)^2+(y+1)^2=20$.

$x^2+2x+1+y^2+6y+9+x^2-6x+9+y^2+2y+1=20$ $\quad x^2-2x+y^2+4y=0$

Př. 5: Urči množinu všech bodů X roviny, které mají od bodu $A[-1;-3]$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $B[3;-1]$.

Teď už nevíme, jaký výsledek máme očekávat. Podle zadání platí: $|AX|=2|BX|$.

$\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$ $\quad /^2$ $\quad (x+1)^2+(y+3)^2=4\left[(x-3)^2+(y+1)^2\right]$

$x^2+2x+1+y^2+6y+9=4\left(x^2-6x+9+y^2+2y+1\right)$

$3x^2-26x+3y^2+2y+30=0$ $\quad /:3$

$$x^2-\frac{26}{3}x+y^2+\frac{2}{3}y+10=x^2-2x\cdot\frac{13}{3}+\left(\frac{13}{3}\right)^2-\left(\frac{13}{3}\right)^2+y^2+2y\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+10=0$$

$$\left(x-\frac{13}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{9} \Rightarrow S\left[\frac{13}{3};-\frac{1}{3}\right],\ r=\sqrt{\frac{80}{9}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

Př. 6: (BONUS) Prohlédni si řešení předchozího příkladu a rozhodni, jak se změní výsledek, pokud bude platit $|AX|=k|BX|$, kde k je kladné reálné číslo.

$x^2+2x+1+y^2+6y+9=k^2\left(x^2-6x+9+y^2+2y+1\right)$.

$x^2+2x+1+y^2+6y+9=k^2x^2-6k^2x+k^2 9+k^2y^2+k^2 2y+k^2$

$0=\left(k^2-1\right)x^2+\left(k^2-1\right)y^2-\left(6k^2+2\right)x+\left(2k^2-6\right)y+10k^2-10$

$\left(k^2-1\right)x^2+\left(k^2-1\right)y^2-2\left(3k^2+1\right)x-2\left(3-k^2\right)y+10\left(k^2-1\right)=0$ $\quad /:\left(k^2-1\right)$

$$x^2+y^2-2\frac{\left(3k^2+1\right)}{\left(k^2-1\right)}x-2\frac{\left(3-k^2\right)}{\left(k^2-1\right)}y+10=0$$ Platí: $m=\frac{\left(3k^2+1\right)}{\left(k^2-1\right)}$, $n=\frac{\left(3-k^2\right)}{\left(k^2-1\right)}$, $p=10$.

$m^2+n^2-p=0$. $\quad$ Dosadíme: $\left[\frac{\left(3k^2+1\right)}{\left(k^2-1\right)}\right]^2+\left[\frac{\left(3-k^2\right)}{\left(k^2-1\right)}\right]^2-10>0$.

$$\frac{\left(3k^2+1\right)^2}{\left(k^2-1\right)^2}+\frac{\left(3-k^2\right)^2}{\left(k^2-1\right)^2}-10\frac{\left(k^2-1\right)^2}{\left(k^2-1\right)^2}>0 \qquad \frac{9k^4+6k^2+1+9-6k^2+k^4-10k^4+20k^2-10}{\left(k^2-1\right)^2}>0$$

$\frac{20k^2}{\left(k^2-1\right)^2}>0$ - Zlomek obsahuje pouze druhé mocniny $\Rightarrow$ pro $k>0;k\neq 1$ je větší než nula.