7.5.2 Hledání kružnic I

Př. 1: Kružnice je dána obecnou rovnicí $x^2+y^2+2x+6y+2=0$. Najdi její střed a poloměr. Rozhodni, zda na kružnici leží bod $A[1;-1]$.

$x^2+y^2+2x+6y+2=x^2+2x\cdot1+1^2-1^2+y^2+2y\cdot3+3^2-3^2+2=$

$(x+1)^2+(y+3)^2=8 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S[-1;-3]$ a poloměr $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

$x^2+y^2+2x+6y+2=1^2+(-1)^2+2\cdot1+6\cdot(-1)+2=0 \Rightarrow$ Bod $A[1;-1]$ leží

Př. 2: Pro které hodnoty parametru *p* je rovnice $x^2+y^2+2x-6y+p=0$ obecnou rovnicí kružnice? Urči souřadnice jejího středu a její poloměr.

$x^2+y^2+2x-6y+p=x^2+2x\cdot1+1^2-1^2+y^2-2y\cdot3+3^2-3^2+p=0$

$(x+1)^2+(y-3)^2=10-p$

$10-p>0 \Rightarrow p<10$ Středem v bodě $S[-1;3]$ a poloměrem $r=\sqrt{10-p}$.

Př. 3: Napiš středovou rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[-1;3]$ a prochází bodem $A[1;1]$.

$r=|SA|=\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Hledaná kružnice má poloměr $r=2\sqrt{2}$ a středovou rovnici $(x+1)^2+(y-3)^2=8$

Př. 4: Najdi středový tvar rovnice kružnice *k*, jestliže úsečka *AB*, $A[-2;3]$, $B[4;1]$ je jedním z jejích průměrů. Zjisti, zda na kružnici leží bod $C[2;5]$. Najdi všechny body, které leží na kružnici a jejichž *x*-ová souřadnice je rovna 0. Ještě před vyřešením posledního části příkladu rozhodni, kolik takových bodů může být.

Střed kružnice = střed úsečky *AB*: $S=S_{AB} \Rightarrow S[1;2]$. $\Rightarrow$

$r=|AS|=\sqrt{(1-[-2])^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$. Středová rovnice: $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.

Bod $C[2;5]$: $(2-1)^2+(3-2)^2=10$

$1^2+3^2=10 \Rightarrow$ Bod $C[2;5]$ leží na kružnici *k*.

Hledáme body s nulovou *x*-ovou souřadnicí ležící na kružnici *k* $\Rightarrow$ vlastně hledáme průsečíky přímky (osy *y*) s kružnicí *k* $\Rightarrow$ 0, 1 nebo 2 řešení.

Dosadíme body $X[0;y]$ do rovnice $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.

$(0-1)^2+(y-2)^2=10 \Rightarrow$ kvadratická rovnice $\Rightarrow$ 0, 1 nebo 2 řešení.

$1+y^2-4y+4=10 \qquad y^2-4y-5=0 \qquad (y-5)(y+1)=0 \Rightarrow$

$y_1=5 \Rightarrow$ bod $X_1[0;5] \qquad y_2=-1 \Rightarrow$ bod $X_2[0;-1]$

Př. 5: Najdi kružnici, která prochází body $A[-2;2]$, $B[4;0]$ a jejíž střed leží na přímce $p: x-y+2=0$.

Hledáme střed kružnice (poloměr snadno dopočítáme po jeho nalezení) $\Rightarrow$ potřebujeme určit dvě souřadnice $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice.
1. rovnice: Střed leží na přímce *p* $\Rightarrow$ musí vyhovovat její rovnici.
2. rovnice: $\Rightarrow$ střed kružnice leží na ose úsečky *AB*.

Střed úsečky AB: $S_{AB}\left[\frac{-2+4}{2};\frac{2+0}{2}\right]\Rightarrow S_{AB}[1;1]$.

Směrový vektor úsečky AB je normálový vektor osy: $\boldsymbol{u}_{AB}=B-A=(6;-2)\Rightarrow \boldsymbol{n}_o=(3;-1)$.

Rovnice osy: $3x-y+c=0$. Osa prochází bodem $S_{AB}[1;1]$ $\Rightarrow$ $3\cdot 1-1+c=0\Rightarrow c=-2$.

Rovnice osy: $3x-y-2=0$.

Řešíme soustavu: $\begin{array}{l} x-y+2=0\Rightarrow y=x+2 \\ 3x-y-2=0\Rightarrow y=3x-2 \end{array}$

Srovnávací metoda: $x+2=3x-2$.

$2x=4$ $\qquad$ $x=2$ $\Rightarrow$ $y=x+2=2+2=4$

Hledaná kružnice má střed v bodě $S[2;4]$.

Poloměr: $r=|SA|=\sqrt{(s_1-a_1)^2+(s_2-a_2)^2}=\sqrt{(2-[-2])^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

Středová rovnice hledané kružnice je $(x-2)^2+(y-4)^2=20$.

Př. 6: Najdi kružnici, která prochází body $A[0;0]$, $B[1;3]$, $C[4;2]$. Urči její střed a poloměr.

1. napodobení geometrické konstrukce

$S_{AB}\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, $\boldsymbol{u}_{AB}=(1;3)\Rightarrow \boldsymbol{n}_o=(1;3)$ $\qquad$ Osa úsečky AB: $x+3y-5=0$.

$S_{AC}[2;1]$, $\boldsymbol{u}_{AC}=(4;2)\Rightarrow \boldsymbol{n}_o=(2;1)$ $\qquad$ Osa úsečky AC: $2x+y-5=0$.

Řešíme soustavu: $\begin{array}{l} x+3y-5=0 \\ 2x+y-5=0\Rightarrow y=5-2x \end{array}$

Dosadíme do první rovnice: $x+3(5-2x)-5=0$.

$x+15-6x-5=0$ $\qquad$ $5x=10$ $\qquad$ $x=2$ $\Rightarrow$ $y=5-2x=5-2\cdot 2=1$.

Kružnice má střed v bodě $S[2;1]$. $\quad$ Poloměr: $r=|SA|=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

Středová rovnice hledané kružnice: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

2. Dosazení do obecné rovnice kružnice

Rovnici je možné napsat v obecném tvaru: $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$. Rovnice obsahuje tři neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme tři rovnice.

$A[0;0]$: $0^2+0^2-2m\cdot 0-2n\cdot 0+p=0\Rightarrow p=0$ ($p=0$ dosazujeme i do dalších rovnic)

$B[1;3]$: $1^2+3^2-2m\cdot 1-2n\cdot 3+0=0\Rightarrow 2m+6n=10$

$C[4;2]$: $4^2+2^2-2m\cdot 4-2n\cdot 2+0=0\Rightarrow 8m+4n=20$

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu: $\begin{array}{l} m+3n=5 \\ 2m+n=5\Rightarrow n=5-2m \end{array}$ $\qquad$ (stejná soustava jako u předchozího postupu).

Dosadíme do první rovnice: $m+3(5-2n)=5$.

$m+15-6m=5$ $\qquad$ $m=2$ $\qquad$ $n=5-2m=5-2\cdot 2=1$

Kružnice má obecnou rovnici: $x^2+y^2-2\cdot 2x-2\cdot 1y+0=0$.

$x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2+y^2-2\cdot 1y+1^2-1^2+0=(x-2)^2+(y-1)^2-5=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$ $\Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S[2;1]$ a poloměr $r=\sqrt{5}$.

Př. 7: Rozhodni a zdůvodni, kdy je který z obou postupu na řešení předchozího příkladu výhodnější.

Př. 8: Petáková:
strana 124/cvičení 5 a) d)
strana 124/cvičení 7 a)