

7.5.2 Hledání kružnic I

Předpoklady: 7501, kružnice z geometrie

Př. 1: Kružnice je dána obecnou rovnicí $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = 0$. Najdi její střed a poloměr. Rozhodni, zda na kružnici leží bod $A[1; -1]$.

Obecnou rovnici musíme upravit na středovou.

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 2 =$$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 - 8 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 8 \Rightarrow \text{Kružnice má střed v bodě } S[-1; -3] \text{ a poloměr } r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Pokud bod $A[1; -1]$ leží na kružnici musí vyhovovat její rovnici \Rightarrow dosadíme ho do ní.

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = 1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + 2 = 0 \Rightarrow \text{Bod } A[1; -1] \text{ leží na zadané kružnici.}$$

Př. 2: Pro které hodnoty parametru p je rovnice $x^2 + y^2 + 2x - 6y + p = 0$ obecnou rovnicí kružnice? Urči souřadnice jejího středu a její poloměr.

Rovnici se pokusíme převést na středový tvar, ze kterého můžeme činit závěry.

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + p = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + p =$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + p - 10 = 0$$

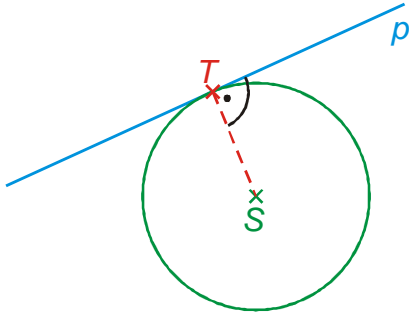
$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10 - p$$

Pravá strana středové rovnice kružnice má význam druhé mocniny poloměru \Rightarrow musí být kladná $\Rightarrow 10 - p > 0 \Rightarrow p < 10$. Pro tyto hodnoty parametru p je zadaná rovnice, obecnou rovnicí kružnice se středem v bodě $S[-1; 3]$ a poloměrem $r = \sqrt{10 - p}$.

Ve zbytku hodiny budeme hledat kružnice (jejich středy a poloměry), tak aby splňovaly zadané podmínky \Rightarrow musíme si zopakovat pravidla, která pro kružnice platí.

- Kružnice je množina bodů stejně vzdálených od jejího středu (této vzdálenosti říkáme poloměr) \Rightarrow pokud kružnice prochází dvěma body, její střed leží na ose úsečky určené těmito body.
- Střed kružnice opsané trojúhelníku (kružnice procházející třemi body) leží na průsečíku os libovolných dvou stran.
- Množina všech bodů, ze kterých je úsečka vidět pod úhlem 90° , je kružnice, jejíž průměr je daná úsečka (bez krajních bodů úsečky) - Thaletova kružnice.

- Úsečka spojující tečný bod se středem kružnice je kolmá na svou tuto tečnu.



- Střed kružnice, která se dotýká dvou různoběžek, leží na ose jejich úhlu.

Pedagogická poznámka: Následující příklady opět doporučuji řešit tak, že nejdříve necháte studentům pět, deset minut na rozmyšlenou, projdete si řešení jednotlivých příkladů, a pak je necháte počítat. Ti nejlepší nemusí na společné povídání čekat a mohou počítat rovnou.

Př. 3: Napiš středovou rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[-1;3]$ a prochází bodem $A[1;1]$.

Na sestavení rovnice potřebujeme střed a poloměr \Rightarrow musíme zjistit poloměr, který je roven vzdálenost libovolného bodu kružnice od jejího středu \Rightarrow

$$r = |SA| = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Hledaná kružnice má poloměr $r = 2\sqrt{2}$ a středovou rovnici $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$

Pedagogická poznámka: Studenti často využívají středovou rovnici kružnice, do které dosadí bod $A[1;1]$ a určí tak poloměr.

Př. 4: Najdi středový tvar rovnice kružnice k , jestliže úsečka AB , $A[-2;3]$, $B[4;1]$ je jedním z jejích průměrů. Zjisti, zda na kružnici leží bod $C[2;5]$. Najdi všechny body, které leží na kružnici a jejichž x -ová souřadnice je rovna 0. Ještě před vyřešením poslední části příkladu rozhodni, kolik takových bodů může být.

Musíme určit střed a poloměr kružnice.

Střed kružnice = střed úsečky AB : $S = S_{AB} \Rightarrow S[1;2]$.

Poloměr kružnice = vzdálenost středu úsečky od jednoho z krajních bodů

$$\Rightarrow r = |AS| = \sqrt{(1-[-2])^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}.$$

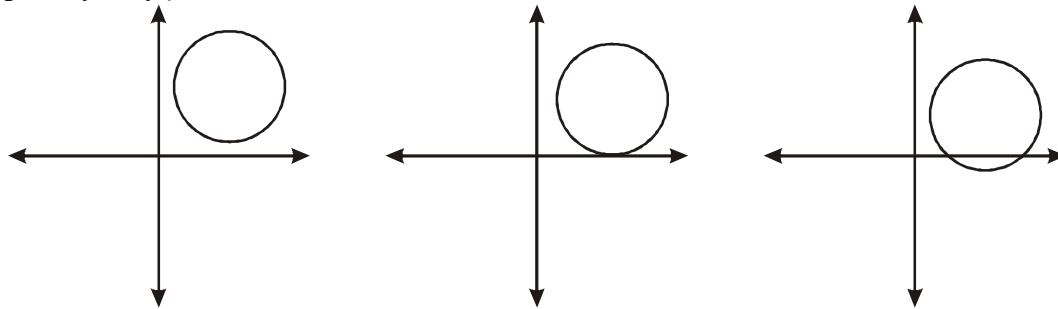
Středová rovnice: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

Bod $C[2;5]$ leží na kružnici k , pokud vyhovuje její rovnici \Rightarrow dosadíme ho do odvozené rovnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

$$(2-1)^2 + (3-2)^2 = 10$$

$1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow$ Bod $C[2;5]$ leží na kružnici k .

Hledáme body s nulovou x -ovou souřadnicí ležící na kružnici $k \Rightarrow$ vlastně hledáme průsečíky přímky (osy y) s kružnicí $k \Rightarrow 0, 1$ nebo 2 řešení.



Tento konkrétní příklad: osa y se protíná s přímkou $AB \Rightarrow$ prochází vnitřkem kružnice \Rightarrow měli bychom najít dvě řešení.

Dosadíme body $X[0; y]$ do rovnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

$(0-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \Rightarrow$ kvadratická rovnice $\Rightarrow 0, 1$ nebo 2 řešení.

$$1 + y^2 - 4y + 4 = 10$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$(y-5)(y+1) = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = 5 \Rightarrow \text{bod } X_1[0;5]$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow \text{bod } X_2[0;-1]$$

Na kružnici leží dva body s nulovou x -ovou souřadnicí.

Př. 5: Najdi kružnici, která prochází body $A[-2;2]$, $B[4;0]$ a jejíž střed leží na přímce $p: x - y + 2 = 0$.

Hledáme střed kružnice (poloměr snadno dopočítáme po jeho nalezení) \Rightarrow potřebujeme určit dvě souřadnice \Rightarrow potřebujeme dvě rovnice.

1. rovnice: Střed leží na přímce $p \Rightarrow$ musí vyhovovat její rovnici.

2. rovnice: Kružnice prochází body $A[-2;2]$, $B[4;0] \Rightarrow$ její střed je od obou stejně daleko \Rightarrow střed kružnice leží na ose úsečky AB .

Střed úsečky AB : $S_{AB} \left[\frac{-2+4}{2}; \frac{2+0}{2} \right] \Rightarrow S_{AB} [1;1]$.

Směrový vektor úsečky AB je normálový vektor osy: $\mathbf{u}_{AB} = B - A = (6; -2) \Rightarrow \mathbf{n}_o = (3; -1)$.

Rovnice osy: $3x - y + c = 0$.

Osa prochází bodem $S_{AB} [1;1] \Rightarrow 3 \cdot 1 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

Rovnice osy: $3x - y - 2 = 0$.

Řešíme soustavu: $x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = x + 2$
 $3x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 3x - 2$

Srovnávací metoda: $x + 2 = 3x - 2$.

$$2x = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow y = x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Hledaná kružnice má střed v bodě $S[2;4]$.

$$\text{Poloměr: } r = |SA| = \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2} = \sqrt{(2 - [-2])^2 + (4 - 2)^2} = 2\sqrt{5}$$

Středová rovnice hledané kružnice je $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$.

Poznámka: Příklad je samozřejmě možné řešit tak, že kromě rovnice přímky použijeme jako druhou rovnici podmínku stejné vzdálenosti bodů A, B od středu S : $|SA| = |SB|$, po dosazení:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Př. 6: Najdi kružnici, která prochází body $A[0;0]$, $B[1;3]$, $C[4;2]$. Urči její střed a poloměr.

Dva možné postupy řešení:

1. napodobení geometrické konstrukce

Hledáme průsečík osy úsečky AB a osy úsečky AC (jde o nalezení kružnice opsané trojúhelníku).

$$S_{AB} \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right], \mathbf{u}_{AB} = (1;3) \Rightarrow \mathbf{n}_o = (1;3)$$

$$\text{Rovnice osy: } x + 3y + c = 0, \text{ prochází bodem } S_{AB} \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right] \Rightarrow \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -5.$$

$$\text{Osa úsečky } AB: x + 3y - 5 = 0.$$

$$S_{AC} [2;1], \mathbf{u}_{AC} = (4;2) \Rightarrow \mathbf{n}_o = (2;1)$$

$$\text{Rovnice osy: } 2x + y + c = 0, \text{ prochází bodem } S_{AC} [2;1] \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = -5.$$

$$\text{Osa úsečky } AC: 2x + y - 5 = 0.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{Řešíme soustavu:} \\ x + 3y - 5 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 - 2x \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme do první rovnice: } x + 3(5 - 2x) - 5 = 0.$$

$$x + 15 - 6x - 5 = 0$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 5 - 2x = 5 - 2 \cdot 2 = 1.$$

Kružnice má střed v bodě $S[2;1]$.

$$\text{Poloměr: } r = |SA| = \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{Středová rovnice hledané kružnice: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

2. Dosazení do obecné rovnice kružnice

Rovnici je možné napsat v obecném tvaru: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$. Rovnice obsahuje tři neznámé \Rightarrow potřebujeme tři rovnice. Každý ze tří bodů musí rovnici vyhovovat \Rightarrow postupně dosazujeme:

$$A[0;0]: 0^2 + 0^2 - 2m \cdot 0 - 2n \cdot 0 + p = 0 \Rightarrow p = 0 \quad (p = 0 \text{ budeme ihned dosazovat i do dalších rovnic})$$

$$B[1;3]: 1^2 + 3^2 - 2m \cdot 1 - 2n \cdot 3 + 0 = 0 \Rightarrow 2m + 6n = 10$$

$$C[4;2]: 4^2 + 2^2 - 2m \cdot 4 - 2n \cdot 2 + 0 = 0 \Rightarrow 8m + 4n = 20$$

\Rightarrow Řešíme soustavu: $m + 3n = 5$
 $2m + n = 5 \Rightarrow n = 5 - 2m$ (stejná soustava jako u předchozího postupu).

Dosadíme do první rovnice: $m + 3(5 - 2n) = 5$.

$$m + 15 - 6m = 5$$

$$m = 2$$

$$n = 5 - 2m = 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

Kružnice má obecnou rovnici: $x^2 + y^2 - 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1y + 0 = 0$.

Upravíme na středový tvar:

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2 \cdot 1y + 1^2 - 1^2 + 0 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 5 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Rightarrow \text{Kružnice má střed v bodě } S[2;1] \text{ a poloměr } r = \sqrt{5}.$$

Dodatek: Oba způsoby jsou důležité, opět ilustrují dva základní přístupy v analytické geometrii

Př. 7: Rozhodni a zdůvodni, kdy je který z obou postupů na řešení předchozího příkladu výhodnější.

Druhý postup je jednodušší, když nezískáme složitou soustavu rovnic \Rightarrow v případě, že velká část souřadnic je nulová.

Př. 8: Petáková:
strana 124/cvičení 5 a) d)
strana 124/cvičení 7 a)

Shrnutí: Kdo hledá, najde. I kružnice.