

7.4.11 Výpočty vzdáleností III

Předpoklady: 7409

Pedagogická poznámka: Hodina sice obsahuje pouze dva příklady, ale pokud se Vám podaří spočítat jen ten první oběma metodami, bude to úspěch. Společně si vysvětlíme postup a potom nechávám studenty počítat samostatně. Kontrolujeme si výsledky v etapách. Ještě před začátkem výpočtů si domluvíme, jaká písmena budeme používat u které přímky pro označení parametrů, aby byly kontroly jednodušší. U druhého postupu si nadiktujeme jeho pět bodů a pak je studenti počítají.

Př. 1: Urči vzdálenost mimoběžných přímek $p(A; \mathbf{u})$ a $q(B; \mathbf{v})$, $A[-2; 0; 1]$, $\mathbf{u} = (3; -2; 2)$, $B[-1; 2; -2]$, $\mathbf{v} = (-2; 1; -2)$.

Vzdálenost mimoběžek = délka příčky (úsečky, která je na obě přímky kolmá a její krajní body na nich leží) = nejkratší možná délka.

Problém (Podobný jako u vzdálenosti bodu od přímky): Máme sice směr, ale nevíme, kde máme na přímkách začít \Rightarrow podobné řešení: Budeme se tvářit, že známe souřadnice obou krajních bodů příčky a pomocí podmínek, které musí příčka splňovat, najdeme hodnoty parametrů, které k vyjádření bodů použijeme.

Krajní body tětivy: $P[-2+3t; -2t; 1+2t]$ (leží na přímce p),

$Q[-1-2s; 2+s; -2-2s]$ (leží na přímce q).

Vektor $Q-P = ((-1-2s)-(-2+3t); (2+s)-(-2t); (-2-2s)-(1+2t))$

$Q-P = (1-2s-3t; 2+s+2t; -3-2s-2t)$

Vektor $Q-P$ je kolmý na přímku p (a tedy na vektor $\mathbf{u} = (3; -2; 2)$).

$(Q-P) \cdot \mathbf{u} = 0$

$(1-2s-3t; 2+s+2t; -3-2s-2t)(3; -2; 2) = 0$

$3(1-2s-3t) - 2(2+s+2t) + 2(-3-2s-2t) = 0$

$3 - 6s - 9t - 4 - 2s - 4t - 6 - 4s - 4t = 0$

$12s + 17t = -7$

Vektor $Q-P$ je kolmý na přímku q (a tedy na vektor $\mathbf{v} = (-2; 1; -2)$).

$(Q-P) \cdot \mathbf{v} = 0$

$(1-2s-3t; 2+s+2t; -3-2s-2t)(-2; 1; -2) = 0$

$-2(1-2s-3t) + 1(2+s+2t) - 2(-3-2s-2t) = 0$

$-2 + 4s + 6t + 2 + s + 2t + 6 + 4s + 4t = 0$

$9s + 12t = -6$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$12s + 17t = -7$

$9s + 12t = -6$

$$12s + 17t = -7$$

$$\frac{3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{3t = 3}$$

$$t = 1$$

Dopočítáme s : $9s + 12 \cdot 1 = -6$.

$$9s = -18 \Rightarrow s = -2$$

Dopočítáme souřadnice bodů P a Q .

$$P[-2 + 3t; -2t; 1 + 2t] \Rightarrow P[-2 + 3 \cdot 1; -2 \cdot 1; 1 + 2] \Rightarrow P[1; -2; 3]$$

$$Q[-1 - 2s; 2 + s; -2 - 2s] \Rightarrow Q[-1 - 2(-2); 2 + (-2); -2 - 2(-2)] \Rightarrow Q[3; 0; 2]$$

Určíme vzdálenost $|PQ|$:

$$|PQ| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-[-2])^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Jiná možnost, jak najít body P a Q .

Přímka je kolmá na obě přímky \Rightarrow **směr přímky** můžeme určit jako vektorový součin směrů obou přímek:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (3; -2; 2) \times (3; -2) \\ \mathbf{v} &= (-2; 1; -2) \times (-2; 1) \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{w} = (4-2; -4+6; 3-4) = (2; 2; -1)$$

Bod Q určitě leží v rovině, která obsahuje přímku p a směr přímky w (leží v ní celá přímka) \Rightarrow **rovina, ve které leží přímka.**

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (3; -2; 2) \times (-2) \\ \mathbf{w} &= (2; 2; -1) \times 2 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{n} = (2-4; 4+3; 6+4) = (-2; 7; 10)$$

Rovnice roviny: $-2x + 7y + 10z + d = 0$

Dosadíme bod $A[-2; 0; 1]$: $-2(-2) + 7 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -14$

Rovina obsahující přímku: $-2x + 7y + 10z - 14 = 0$

Hledáme **průsečík roviny s přímkou q (bod Q):**

$$-2x + 7y + 10z - 14 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Soustava rovnic:} \quad & x = -1 - 2s \\ & y = 2 + s \\ & z = -2 - 2s \end{aligned}$$

$$-2(-1 - 2s) + 7(2 + s) + 10(-2 - 2s) - 14 = 0$$

$$2 + 4s + 14 + 7s - 20 - 20s - 14 = 0$$

$$-18 = 9s$$

$$s = -2$$

$$Q[-1 - 2s; 2 + s; -2 - 2s] \Rightarrow Q[-1 - 2(-2); 2 + (-2); -2 - 2(-2)] \Rightarrow Q[3; 0; 2]$$

Bod P je možné určit mnoha způsoby. Například:

Známe přímku na které leží přímka: $r(Q; w) \Rightarrow$ najdeme **průsečík přímky s přímkou p :**

$$x = -2 + 3t \qquad x = 3 + 2s$$

$$p: y = -2t \qquad r: y = 2s$$

$$z = 1 + 2t, t \in R \qquad z = 2 - s, s \in R$$

Soustava rovnic:

$$-2 + 3t = 3 + 2s$$

$-2t = 2s \Rightarrow$ Z druhé rovnice $s = -t$ dosadíme do zbývajících dvou.

$$1 + 2t = 2 - s$$

$$\frac{-2 + 3t = 3 + 2(-t)}{1 + 2t = 2 - (-t)} \Rightarrow t = 1$$

$$\frac{1 + 2t = 2 - (-t)}{1 + 2t = 2 - (-t)} \Rightarrow t = 1$$

Průsečík (bod P) existuje \Rightarrow dopočítáme jeho souřadnice:

$$P[-2 + 3t; -2t; 1 + 2t] \Rightarrow P[-2 + 3 \cdot 1; -2 \cdot 1; 1 + 2] \Rightarrow P[1; -2; 3]$$

Určíme vzdálenost $|PQ|$:

$$|PQ| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-[-2])^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je na středoškolské poměry nezvykle početně náročný. Jde o důsledek faktu, že při vymyšlení příkladu jsem neuvažoval druhé řešení, které je na rozdíl od řešení připraveného podstatně složitější. Přesto jsem příklad nakonec nechal jako ukázkou toho, že i poměrně komplikovaný výpočet může vést k poměrně jednoduchému výsledku. Jako opravdový bonus pro ty nejlepší pak může sloužit úkol vymyslet příklad, který by měl obě řešení stejně jednoduchá.

Př. 2: Na přímce $q: \{[-1 + s; -8 + 3s; 5 - 2s], s \in R\}$ najdi bod Q , který je od přímky

$p: \{[3t; 4 + 2t; -3 - 2t], t \in R\}$ vzdálen 6. Kolik řešení může mít tento příklad?

Množina bodů, které mají od přímky p vzdálenost 6 tvoří plášť válce, který má v přímce p osu a jehož poloměr je 6. Přímka q se s ním může protnout v žádném, jednom, nebo ve dvou bodech.

Tento příklad už jsme řešili minulou hodinu, jenže jsme přímo znali souřadnice bodu a zjišťovali jeho vzdálenost od přímky. Teď vzdálenost známe a musíme zjistit, kde bod leží.

\Rightarrow zopakujeme postup a souřadnice bodu budeme psát pomocí parametru.

$$Q[-1 + s; -8 + 3s; 5 - 2s]$$

Bodem Q vedeme rovinu ρ kolmou na přímku p :

$$\mathbf{u}_p = (3; 2; -2) = \mathbf{n}_\rho$$

Rovnice roviny: $3x + 2y - 2z + d = 0$.

$$\text{Rovina prochází bodem } Q: 3(-1 + s) + 2(-8 + 3s) - 2(5 - 2s) + d = 0$$

$$d = 29 - 13s$$

$$\text{Rovina } \rho: 3x + 2y - 2z + 29 - 13s = 0$$

Hledáme bod $P =$ průsečík roviny ρ s přímku $p: \{[3t; 4 + 2t; -3 - 2t], t \in R\}$:

$$3x + 2y - 2z + 29 - 13s = 0$$

$$x = 3t$$

$$y = 4 + 2t$$

$$z = -3 - 2t, t \in R$$

Dosadíme do rovnice roviny: $3(3t) + 2(4 + 2t) - 2(-3 - 2t) + 29 - 13s = 0$

V rovnici máme dvě neznámé, vyjádříme si t (s se zbavíme až na konec):

$$9t + 8 + 4t + 6 + 2t + 29 - 13s = 0$$

$$17t + 43 - 13s = 0$$

$$t = \frac{13s - 43}{17}$$

Teď známe souřadnice bodu P : $P \left[3 \cdot \frac{13s - 43}{17}; 4 + 2 \cdot \frac{13s - 43}{17}; -3 - 2 \cdot \frac{13s - 43}{17} \right]$.

Upravíme do lepšího tvaru $P \left[\frac{39s - 129}{17}; \frac{26s - 18}{17}; \frac{35 - 26s}{17} \right]$.

Vektor $Q - P = [-1 + s; -8 + 3s; 5 - 2s] - \left[\frac{39s - 129}{17}; \frac{26s - 18}{17}; \frac{35 - 26s}{17} \right]$

$$Q - P = \left(\frac{112 - 22s}{17}; \frac{25s - 118}{17}; \frac{50 - 8s}{17} \right)$$

Velikost vektoru $Q - P$ je vzdáleností bodu Q od přímky p (kterou známe) \Rightarrow dosadíme a určíme hodnotu parametru s :

$$|Q - P| = \sqrt{\left(\frac{112 - 22s}{17} \right)^2 + \left(\frac{25s - 118}{17} \right)^2 + \left(\frac{50 - 8s}{17} \right)^2} = 6 \quad /^2$$

$$\left(\frac{112 - 22s}{17} \right)^2 + \left(\frac{25s - 118}{17} \right)^2 + \left(\frac{50 - 8s}{17} \right)^2 = 36 \quad / \cdot 17^2$$

$$(112 - 22s)^2 + (25s - 118)^2 + (50 - 8s)^2 = 10404$$

$$12544 - 4928s + 484s^2 + 625s^2 - 5900s + 13924 + 2500 - 800s + 64s^2 = 10404$$

$$1173s^2 - 11628s + 18564 = 0 \quad / : (3 \cdot 17)$$

$$23s^2 - 228s + 364 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-228) \pm \sqrt{(-228)^2 - 4 \cdot 23 \cdot 364}}{2 \cdot 23} = \frac{228 \pm 136}{46}$$

$$s_1 = \frac{228 + 136}{46} = \frac{182}{23} \quad s_2 = \frac{228 - 136}{46} = 2$$

Dopočítáme body $Q[-1 + s; -8 + 3s; 5 - 2s]$:

$$Q_1 \left[-1 + \frac{182}{23}; -8 + 3 \cdot \frac{182}{23}; 5 - 2 \cdot \frac{182}{23} \right] \Rightarrow Q_1 \left[\frac{160}{23}; \frac{362}{23}; -\frac{249}{23} \right]$$

$$Q_2[-1 + 2; -8 + 3 \cdot 2; 5 - 2 \cdot 2] \Rightarrow Q_2[1; -2; 1]$$

Př. 3: Petáková:

strana 120/cvičení 73 b)

strana 121/cvičení 77

strana 122/cvičení 90

strana 122/cvičení 94

Shrnutí: