

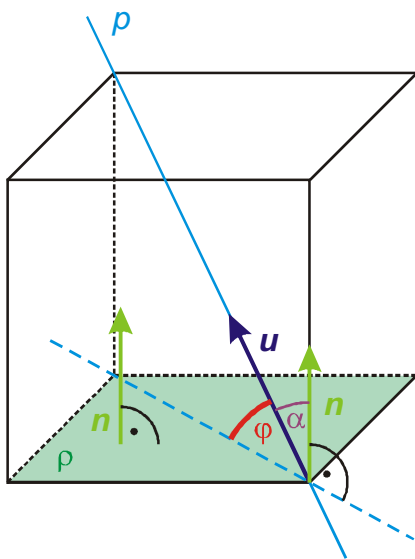
7.4.8 Výpočty odchylek

Př. 1: Jsou dány přímky $p(A; \mathbf{u})$ a $q(B; \mathbf{v})$. Urči jejich odchylku, je-li dáno: $A[2; 2; -1]$, $\mathbf{u} = (-1; 2; 3)$, $B[3; 0; 2]$, $\mathbf{v} = (2; 1; 1)$. Nejdříve srovnaj výpočet odchylky přímek v rovině a v prostoru, poté urči konkrétní hodnotu pro zadané přímky.

$$\mathbf{u} = (-1; 2; 3) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \quad \mathbf{v} = (2; 1; 1) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1; 2; 3)(2; 1; 1) = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3 \quad \cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{|3|}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = 70^\circ 54'$$

Př. 2: Urči odchylku přímky $p: \{[1-2t; 2+t; -1+2t], t \in \mathbb{R}\}$ od roviny $\rho: 2x + y + 3z + 1 = 0$.



$$\mathbf{u} = (-2; 1; 2) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$\mathbf{n} = (2; 1; 3) \Rightarrow |\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

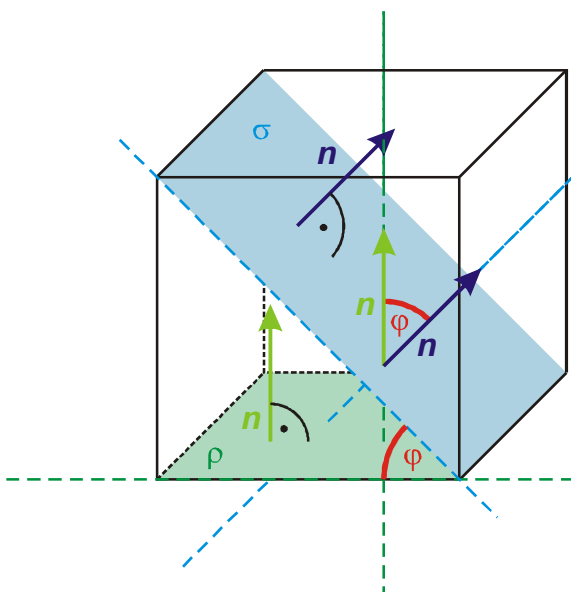
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (-2; 1; 2)(2; 1; 3) = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 3$$

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|3|}{3 \sqrt{14}} = 74^\circ 30'$$

$$\varphi = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 74^\circ 30' = 15^\circ 30'$$

Přímka p má od roviny ρ odchylku $15^\circ 30'$.

Př. 3: Urči odchylku rovin $\rho: x - 2y + z + 2 = 0$ a $\sigma: 2x + y - z + 3 = 0$.



$$\mathbf{n}_\rho = (1; -2; 1) \Rightarrow |\mathbf{n}_\rho| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{n}_\sigma = (2; 1; -1) \Rightarrow |\mathbf{n}_\sigma| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{n}_\sigma = (1; -2; 1)(2; 1; -1) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{n}_\sigma|}{|\mathbf{n}_\rho| \cdot |\mathbf{n}_\sigma|} = \frac{|-1|}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = 80^\circ 24'$$

Odchylka rovin ρ a σ je $80^\circ 24'$.

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 4$, $|SV| = v = 5$. Urči:

- a) odchylku přímek AB a DV b) odchylku rovin ABV a BCV
c) odchylku přímky CV od roviny ABV

Bod D do počátku soustavy souřadnic, bod A na osu X a bod C na osu y .

$$A[4;0;0], B[4;4;0], C[0;4;0], D[0;0;0], V[2;2;5]$$

a) odchylka přímek AB a DV

$$B - A = (0;4;0) \Rightarrow \mathbf{u} = (0;1;0) \qquad V - D = \mathbf{v} = (2;2;5)$$

$$\mathbf{u} = (0;1;0) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \qquad \mathbf{v} = (2;2;5) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0;1;0)(2;2;5) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 2 \qquad \cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{33}} = 69^\circ 38'$$

Odchylka přímek AB a DV je $69^\circ 38'$.

b) odchylka rovin ABV a BCV

$$\text{Rovina } ABV: B - A = (0;4;0) \Rightarrow \mathbf{u} = (0;1;0) \qquad V - A = \mathbf{v} = (-2;2;5)$$

$$\text{Normálový vektor: } \begin{aligned} \mathbf{u} &= (0;1;0) \cdot 0;1 \\ \mathbf{v} &= (-2;2;5) - 2;2 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{n}_{ABV} = (5;0;2)$$

$$\text{Rovina } BCV: C - B = (-4;0;0) \Rightarrow \mathbf{u} = (1;0;0) \qquad V - B = \mathbf{v} = (-2;-2;5)$$

$$\text{Normálový vektor: } \begin{aligned} \mathbf{u} &= (1;0;0) \cdot 1;0 \\ \mathbf{v} &= (-2;-2;5) - 2;-2 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{n}_{BCV} = (0;-5;-2)$$

$$\mathbf{n}_{ABV} = (5;0;2) \Rightarrow |\mathbf{n}_{ABV}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{n}_{BCV} = (0;-5;-2) \Rightarrow |\mathbf{n}_{BCV}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{n}_{ABV} \cdot \mathbf{n}_{BCV} = (5;0;2)(0;-5;-2) = 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -4$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{n}_\sigma|}{|\mathbf{n}_\rho| \cdot |\mathbf{n}_\sigma|} = \frac{|-4|}{\sqrt{29} \sqrt{29}} \Rightarrow \varphi = 82^\circ 4'$$

Odchylka rovin ABV a BCV je $82^\circ 4'$.

c) odchylka přímky CV od roviny ABV

$$V - C = (2;-2;5) \qquad \mathbf{n}_{ABV} = (5;0;2) \text{ (známe z předchozího bodu)}$$

$$\mathbf{u} = (2;-2;5) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{33} \qquad \mathbf{n} = (5;0;2) \Rightarrow |\mathbf{n}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (2;-2;5)(5;0;2) = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 20$$

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|20|}{\sqrt{33} \sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = 49^\circ 43' \qquad \varphi = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 49^\circ 43' = 40^\circ 17'$$

Př. 5: Petáková:

strana 118/cvičení 41 a) c)

strana 118/cvičení 42

strana 118/cvičení 43 a)

strana 119/cvičení 46

strana 119/cvičení 48 a) c)

strana 119/cvičení 50

strana 119/cvičení 52 a) c)

strana 119/cvičení 54