

7.4.8 Výpočty odchylek

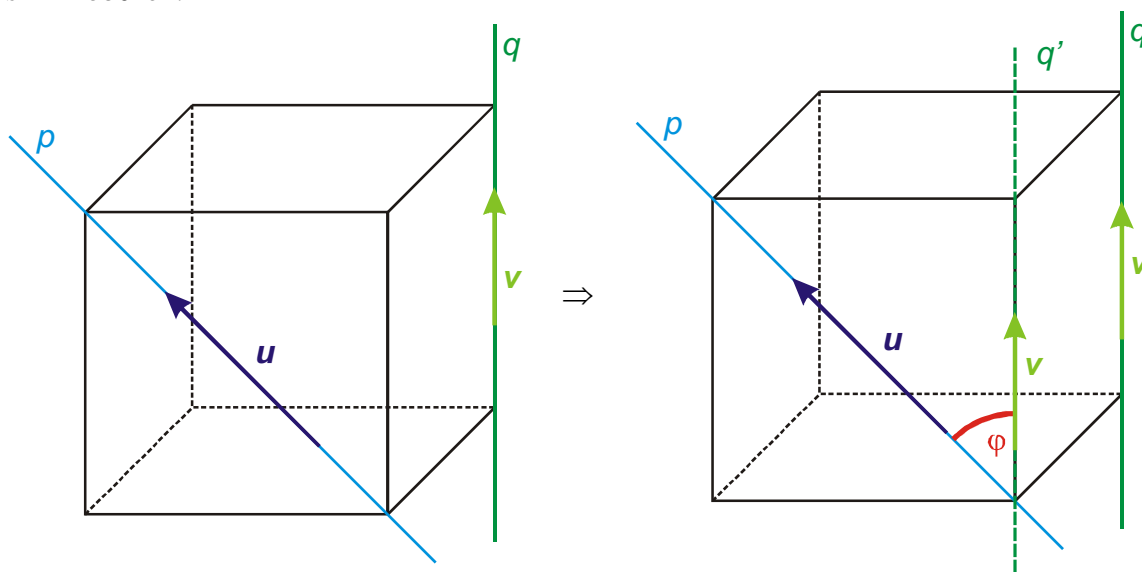
Předpoklady: 7406

Pedagogická poznámka: Na poctivé probrání této hodiny potřebuje běžný student tak jeden a půl hodiny vyučovací.

Definici odchylek pro přímky, roviny atd. už známe ze stereometrie, teď jenom využijeme vektorů k tomu, abychom je počítali.

Př. 1: Jsou dány přímky $p(A; \mathbf{u})$ a $q(B; \mathbf{v})$. Urči jejich odchylku, je-li dáno: $A[2; 2; -1]$, $\mathbf{u} = (-1; 2; 3)$, $B[3; 0; 2]$, $\mathbf{v} = (2; 1; 1)$. Nejdříve srovnaj výpočet odchylky přímek v rovině a v prostoru, poté urči konkrétní hodnotu pro zadané přímky.

Odchylka přímek různoběžných, rovnoběžných přímek se určuje stejně v prostoru i v rovině. Jediný rozdíl je u mimoběžných přímek (v rovině nejsou) – odchylka mimoběžek je definována jako odchylka různoběžek, které získáme, když uděláme rovnoběžku s jednou s mimoběžek.



Jak to budeme počítat? Ze směrových vektorů, které jsou u rovnoběžek stejné \Rightarrow odchylku mimoběžek budeme počítat stejně jak odchylku různoběžek (protože směrový vektor rovnoběžky, kterou bych musel sestavit je stejný jako směrový vektor původní přímky).

$$\mathbf{u} = (-1; 2; 3) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \quad \mathbf{v} = (2; 1; 1) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

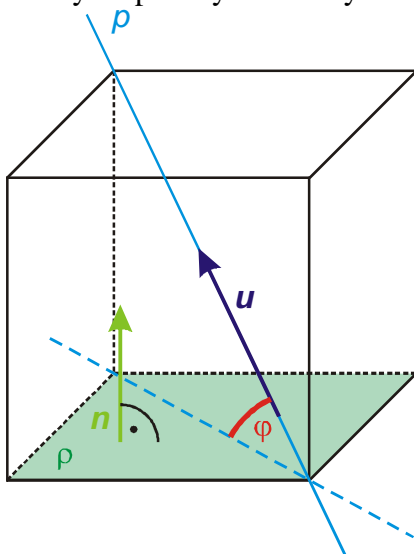
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1; 2; 3) \cdot (2; 1; 1) = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{|3|}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = 70^\circ 54'$$

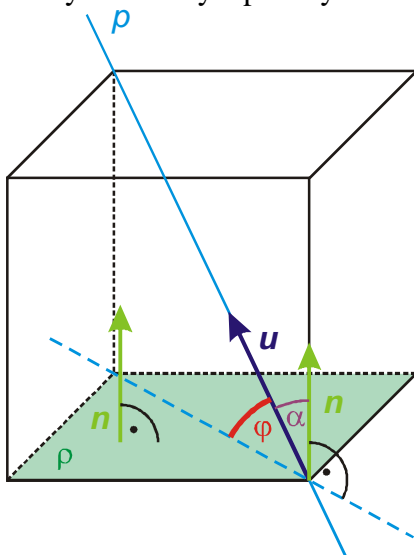
Odchylka přímek p a q je $70^\circ 54'$.

Př. 2: Urči odchylku přímky $p: \{[1-2t; 2+t; -1+2t], t \in R\}$ od roviny $\rho: 2x + y + 3z + 1 = 0$.

Odchylka přímky od roviny = odchylka přímky od jejího kolmého průmětu do roviny



⇒ **Problém:** Jak určíme kolmý průmět (už jsme ho počítali a není to moc rychlé)?
Směr roviny je určen normálovým vektorem ⇒ pomocí normálového vektoru musíme určit i odchylku roviny a přímky.



Jak souvisí úhel mezi normálovým vektorem a přímkou (značíme ho například α) s odchylkou přímky od roviny?

Jejich součet je vždy 90° .

⇒ Určíme odchylku přímky od přímky, která je k rovině kolmá (její směr určuje normálový vektor) a tu odečteme od 90° .

$$\mathbf{u} = (-2; 1; 2) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$\mathbf{n} = (2; 1; 3) \Rightarrow |\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (-2; 1; 2)(2; 1; 3) = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 3$$

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|3|}{3\sqrt{14}} = 74^\circ 30'$$

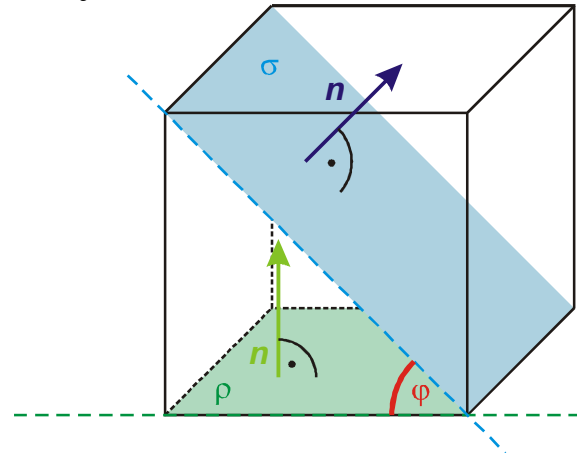
$$\varphi = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 74^\circ 30' = 15^\circ 30'$$

Přímka p má od roviny ρ odchylku $15^\circ 30'$.

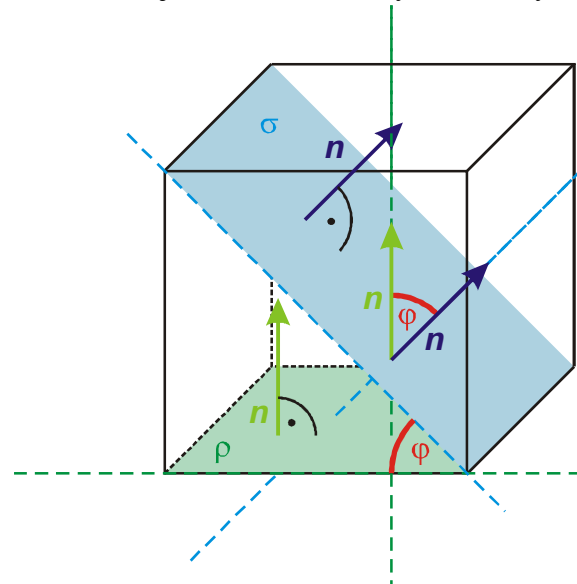
Pedagogická poznámka: Je dobré si odečítání spočteného úhlu od 90° vysvětlit a pak nechat studenty příklad spočítat bez dalšího upozorňování. Je zajímavé kolik z nich na odečtení během chvílky nutné k výpočtu zapomene.

Př. 3: Urči odchylku rovin $\rho: x-2y+z+2=0$ a $\sigma: 2x+y-z+3=0$.

Odchylka dvou rovin = odchylka přímek, které vzniknou jako průsečnice rovin s rovinou, která je k oběma kolmá.



Směr rovin je určen normálovými vektory \Rightarrow měla by v nich být schovaná i jejich odchylka.



Odchylka obou rovin je rovna odchylce přímek, které jsou k rovinám kolmé (a jsou tedy určeny jejich normálovými vektory).

$$\mathbf{n}_\rho = (1; -2; 1) \Rightarrow |\mathbf{n}_\rho| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{n}_\sigma = (2; 1; -1) \Rightarrow |\mathbf{n}_\sigma| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{n}_\sigma = (1; -2; 1)(2; 1; -1) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{n}_\sigma|}{|\mathbf{n}_\rho| \cdot |\mathbf{n}_\sigma|} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = 80^\circ 24'$$

Odchylka rovin ρ a σ je $80^\circ 24'$.

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 4$, $|SV| = v = 5$. Urči:

- a) odchylku přímek AB a DV b) odchylku rovin ABV a BCV
c) odchylku přímky CV od roviny ABV

Nejdříve musíme zvolit soustavu souřadnic a určit souřadnice vrcholů.

Například umístíme bod D do počátku soustavy souřadnic, bod A na osu X a bod C na osu y .

$$A[4;0;0], B[4;4;0], C[0;4;0], D[0;0;0], V[2;2;5]$$

a) odchylka přímek AB a DV

$$B - A = (0;4;0) \Rightarrow \mathbf{u} = (0;1;0) \qquad V - D = \mathbf{v} = (2;2;5)$$

$$\mathbf{u} = (0;1;0) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \qquad \mathbf{v} = (2;2;5) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0;1;0)(2;2;5) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 2$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{33}} = 69^\circ 38'$$

Odchylka přímek AB a DV je $69^\circ 38'$.

b) odchylka rovin ABV a BCV

Rovina ABV :

Dva směrové vektory v rovině ABV :

$$B - A = (0;4;0) \Rightarrow \mathbf{u} = (0;1;0) \qquad V - A = \mathbf{v} = (-2;2;5)$$

$$\text{Normálový vektor: } \begin{matrix} \mathbf{u} = (0;1;0) \\ \mathbf{v} = (-2;2;5) \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{n}_{ABV} = (5;0;2)$$

Rovina BCV :

Dva směrové vektory v rovině BCV :

$$C - B = (-4;0;0) \Rightarrow \mathbf{u} = (1;0;0) \qquad V - B = \mathbf{v} = (-2;-2;5)$$

$$\text{Normálový vektor: } \begin{matrix} \mathbf{u} = (1;0;0) \\ \mathbf{v} = (-2;-2;5) \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{n}_{BCV} = (0;-5;-2)$$

$$\mathbf{n}_{ABV} = (5;0;2) \Rightarrow |\mathbf{n}_{ABV}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{n}_{BCV} = (0;-5;-2) \Rightarrow |\mathbf{n}_{BCV}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{n}_{ABV} \cdot \mathbf{n}_{BCV} = (5;0;2)(0;-5;-2) = 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -4$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{n}_\sigma|}{|\mathbf{n}_\rho| \cdot |\mathbf{n}_\sigma|} = \frac{|-4|}{\sqrt{29} \sqrt{29}} \Rightarrow \varphi = 82^\circ 4'$$

Odchylka rovin ABV a BCV je $82^\circ 4'$.

c) odchylka přímky CV od roviny ABV

$$V - C = (2;-2;5)$$

$$\mathbf{n}_{ABV} = (5;0;2) \quad (\text{známe z předchozího bodu})$$

$$\mathbf{u} = (2;-2;5) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{33} \qquad \mathbf{n} = (5;0;2) \Rightarrow |\mathbf{n}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (2;-2;5)(5;0;2) = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 20$$

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|20|}{\sqrt{33} \sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = 49^\circ 43'$$

$$\varphi = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 49^\circ 43' = 40^\circ 17'$$

Přímka CV má od roviny ABV odchylku $40^\circ 17'$.

Pedagogická poznámka: Pokud máte ve třídě opravdu dobrého studenta, není od věci, nechat ho spočítat celý předchozí příklad pro jiné umístění jehlanu v soustavě souřadnic. Všichni se tak přesvědčí, že na jeho umístění v soustavě souřadnic nezáleží.

Poznámka: Ve všech předchozích příkladech je vidět velká výhoda analytické geometrie – všechny odchylky se počítají stejně obtížně. Obtížnost úlohy nezáleží na konkrétním zadání jako u stereometrie.

Př. 5: Petáková:

- strana 118/cvičení 41 a) c)
- strana 118/cvičení 42
- strana 118/cvičení 43 a)
- strana 119/cvičení 46
- strana 119/cvičení 48 a) c)
- strana 119/cvičení 50
- strana 119/cvičení 52 a) c)
- strana 119/cvičení 54

Shrnutí: Analytická geometrie umožňuje snazší výpočet odchylek definovaných ve stereometrii.