7.4.8 Výpočty odchylek

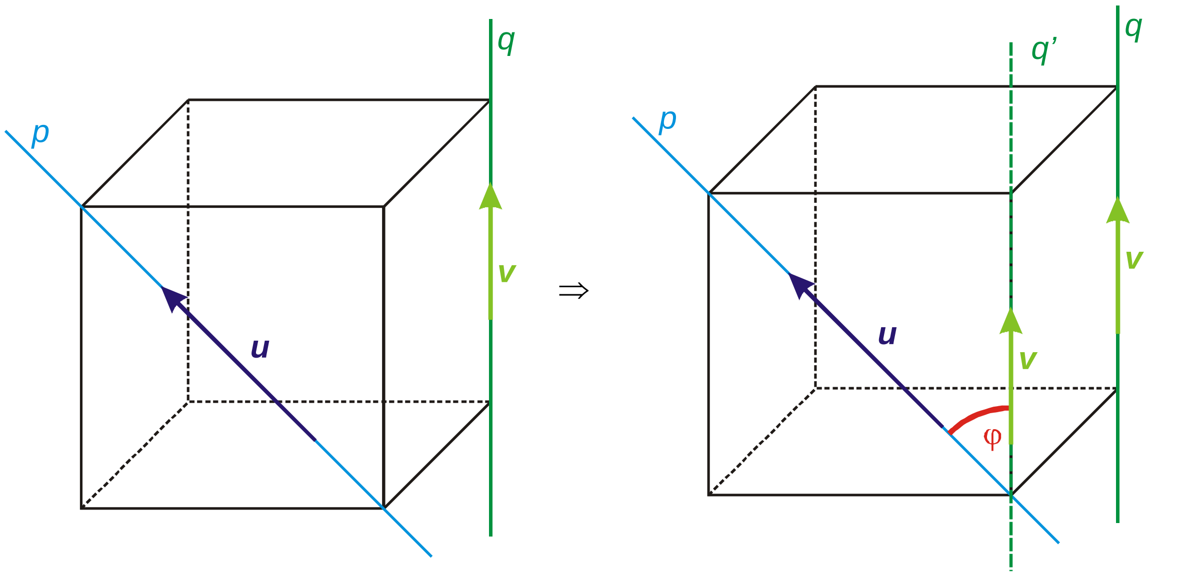
Předpoklady: 7406

Pedagogická poznámka: Na poctivé probrání této hodiny potřebuje běžný student tak jeden a půl hodiny vyučovací.

Definici odchylek pro přímky, roviny atd. už známe ze stereometrie, teď jenom využijeme vektorů k tomu, abychom je počítali.

Př. 1: Jsou dány přímky $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$. Urči jejich odchylku, je-li dáno: $A[2;2;-1]$, $\boldsymbol{u}=(-1;2;3)$, $B[3;0;2]$, $\boldsymbol{v}=(2;1;1)$. Nejdříve srovnej výpočet odchylky přímek v rovině a v prostoru, poté urči konkrétní hodnotu pro zadané přímky.

Odchylka přímek různoběžných, rovnoběžných přímek se určuje stejně v prostoru i v rovině. Jediný rozdíl je u mimoběžných přímek (v rovině nejsou) – odchylka mimoběžek je definována jako odchylka různoběžek, které získáme, když uděláme rovnoběžku s jednou s mimoběžek.



Jak to budeme počítat? Ze směrových vektorů, které jsou u rovnoběžek stejné $\Rightarrow$ odchylku mimoběžek budeme počítat stejně jak odchylku různoběžek (protože směrový vektor rovnoběžky, kterou bych musel sestrojit je stejný jako směrový vektor původní přímky).

$\boldsymbol{u}=(-1;2;3) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ $\qquad \boldsymbol{v}=(2;1;1) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

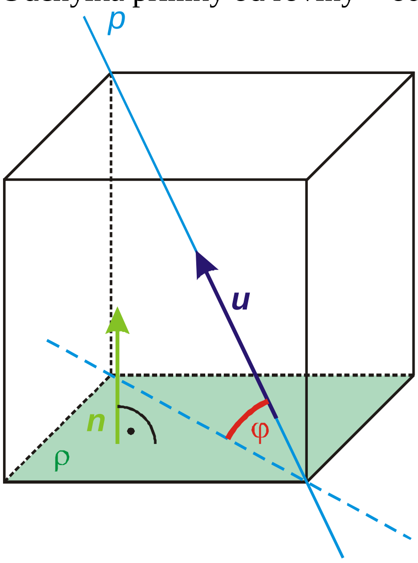
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(-1;2;3)(2;1;1)=-1\cdot(2)+2\cdot1+3\cdot1=3$

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\frac{|3|}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=70°54'$$

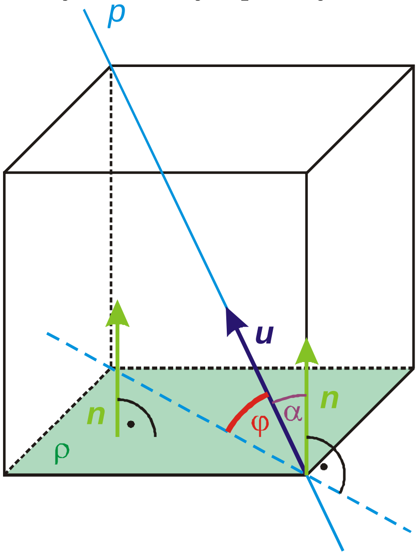
Odchylka přímek *p* a *q* je $70°54'$.

Př. 2: Urči odchylku přímky $p:\{[1-2t;2+t;-1+2t],t\in R\}$ od roviny $\rho:2x+y+3z+1=0$.

Odchylka přímky od roviny = odchylka přímky od jejího kolmého průmětu do roviny



$\Rightarrow$ **Problém:** Jak určíme kolmý průmět (už jsme ho počítali a není to moc rychlé)?
Směr roviny je určen normálovým vektorem $\Rightarrow$ pomocí normálového vektoru musíme určit i odchylku roviny a přímky.



Jak souvisí úhel mezi normálovým vektorem a přímkou (značíme ho například α) s odchylkou přímky od roviny?

Jejich součet je vždy $90°$.

$\Rightarrow$ Určíme odchylku přímky od přímky, která je k rovině kolmá (její směr určuje normálový vektor) a tu odečteme od $90°$.

$\boldsymbol{u}=(-2;1;2) \Rightarrow |\boldsymbol{u}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$ $\boldsymbol{n}=(2;1;3) \Rightarrow |\boldsymbol{n}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=(-2;1;2)(2;1;3)=-2\cdot2+1\cdot1+2\cdot3=3$

$$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|3|}{3\sqrt{14}}=74°30'$$

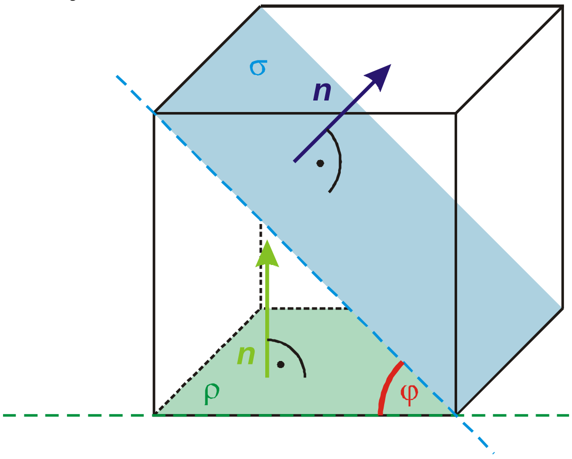
$\varphi=90°-\alpha=90°-74°30'=15°30'$

Přímka p má od roviny ρ odchylku $15°30'$.

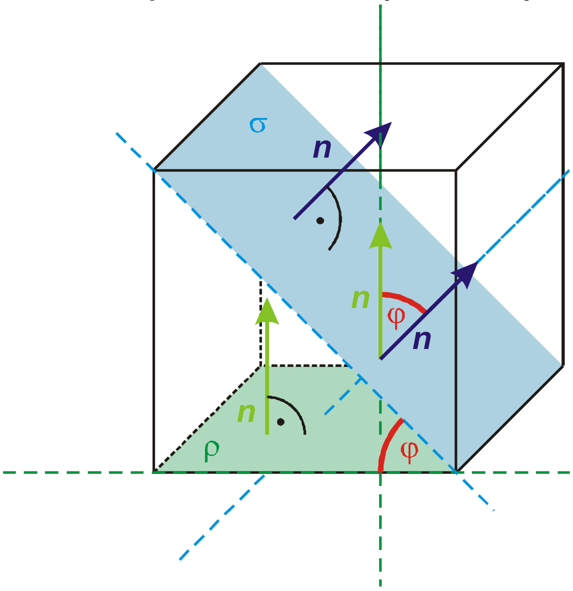
Pedagogická poznámka: Je dobré si odečítání spočteného úhlu od $90°$ vysvětli a pak nechat studenty příklad spočítat bez dalšího upozorňování. Je zajímavé kolik z nich na odečtení během chvilky nutné k výpočtu zapomene.

Př. 3: Urči odchylku rovin $\rho: x-2y+z+2=0$ a $\sigma: 2x+y-z+3=0$.

Odchylka dvou rovin = odchylka přímek, které vzniknou jako průsečnice rovin s rovinou, která je k oběma kolmá.



Směr rovin je určen normálovými vektory $\Rightarrow$ měla by v nich být schovaná i jejich odchylka.



Odchylka obou rovin je rovna odchylce přímek, které jsou k rovinám kolmé (a jsou tedy určeny jejich normálovými vektory).

$\boldsymbol{n}_\rho=(1;-2;1) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_\rho|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\boldsymbol{n}_\sigma=(2;1;-1) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_\sigma|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$\boldsymbol{n}_\rho\cdot\boldsymbol{n}_\sigma=(1;-2;1)(2;1;-1)=1\cdot2+(-2)\cdot1+1\cdot(-1)=-1$

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}_\rho\cdot\boldsymbol{n}_\sigma|}{|\boldsymbol{n}_\rho|\cdot|\boldsymbol{n}_\sigma|}=\frac{|-1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=80°24'$$

Odchylka rovin ρ a σ je $80°24'$.

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 4$, $|SV| = v = 5$. Urči:

a) odchylku přímek AB a DV

b) odchylku rovin ABV a BCV

c) odchylku přímky CV od roviny ABV

Nejdříve musíme zvolit soustavu souřadnic a určit souřadnice vrcholů.
Například umístíme bod D do počátku soustavy souřadnic, bod A na osu X a bod C na osu y.
$A[4;0;0]$, $B[4;4;0]$, $C[0;4;0]$, $D[0;0;0]$, $V[2;2;5]$

a) odchylka přímek *AB* a *DV*

$B - A = (0;4;0) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (0;1;0)$ $\qquad V - D = \boldsymbol{v} = (2;2;5)$

$\boldsymbol{u} = (0;1;0) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{u}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$ $\qquad \boldsymbol{v} = (2;2;5) \Rightarrow |\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (0;1;0)(2;2;5) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 = 2$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{33}} = 69°38'$$

Odchylka přímek AB a DV je $69°38'$.

b) odchylka rovin *ABV* a *BCV*

Rovina ABV:

Dva směrové vektory v rovině ABV:

$B - A = (0;4;0) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (0;1;0)$ $\qquad V - A = \boldsymbol{v} = (-2;2;5)$

Normálový vektor: $\begin{matrix} \boldsymbol{u} = (0;1;0)\,0;1 \\ \boldsymbol{v} = (-2;2;5)-2;2 \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{n}_{ABV} = (5;0;2)$

Rovina BCV:

Dva směrové vektory v rovině BCV:

$C - B = (-4;0;0) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (1;0;0)$ $\qquad V - B = \boldsymbol{v} = (-2;-2;5)$

Normálový vektor: $\begin{matrix} \boldsymbol{u} = (1;0;0)\,1;0 \\ \boldsymbol{v} = (-2;-2;5)-2;-2 \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{n}_{BCV} = (0;-5;-2)$

$\boldsymbol{n}_{ABV} = (5;0;2) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_{ABV}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\boldsymbol{n}_{BCV} = (0;-5;-2) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_{BCV}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$\boldsymbol{n}_{ABV} \cdot \boldsymbol{n}_{BCV} = (5;0;2)(0;-5;-2) = 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -4$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_\rho \cdot \boldsymbol{n}_\sigma|}{|\boldsymbol{n}_\rho| \cdot |\boldsymbol{n}_\sigma|} = \frac{|-4|}{\sqrt{29}\sqrt{29}} \Rightarrow \varphi = 82°4'$$

Odchylka rovin ABV a BCV je $82°4'$.

c) odchylka přímky *CV* od roviny *ABV*

$V - C = (2;-2;5)$

$\boldsymbol{n}_{ABV} = (5;0;2)$ (známe z předchozího bodu)

$\boldsymbol{u} = (2;-2;5) \Rightarrow |\boldsymbol{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{33}$ $\qquad \boldsymbol{n} = (5;0;2) \Rightarrow |\boldsymbol{n}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = (2;-2;5)(5;0;2) = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 20$

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \frac{|20|}{\sqrt{33}\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = 49°43'$$

$\varphi = 90° - \alpha = 90° - 49°43' = 40°17'$
Přímka CV má od roviny ABV odchylku $40°17'$.

Pedagogická poznámka: Pokud máte ve třídě opravdu dobrého studenta, není od věci, nechat ho spočítat celý předchozí příklad pro jiné umístění jehlanu v soustavě souřadnic. Všichni se tak přesvědčí, že na jeho umístění v soustavě souřadnic nezáleží.

Poznámka: Ve všech předchozích příkladech je vidět velká výhoda analytické geometrie – všechny odchylky se počítají stejně obtížně. Obtížnost úlohy nezáleží na konkrétním zadání jako u stereometrie.

Př. 5: Petáková:
strana 118/cvičení 41 a) c)
strana 118/cvičení 42
strana 118/cvičení 43 a)
strana 119/cvičení 46
strana 119/cvičení 48 a) c)
strana 119/cvičení 50
strana 119/cvičení 52 a) c)
strana 119/cvičení 54

Shrnutí: Analytická geometrie umožňuje snazší výpočet odchylek definovaných ve stereometrii.