

## 7.4.6 Polohové úlohy v prostoru I

**Př. 1:** Jaká může být v prostoru vzájemná poloha přímky a roviny? Jakým způsobem určíme vzájemnou polohu parametricky zadané přímky a roviny dané obecnou rovnicí? Nakresli diagram, který zachytí postup při určování vzájemné polohy roviny a přímky.

**Př. 2:** Urči vzájemnou polohu přímky  $p = \{[1+t; 2-3t; 2+2t], t \in R\}$  a roviny  $\rho: x + y + z + 2 = 0$ . Pokud je přímka s rovinou různoběžná, najdi jejich průsečík.

$$\mathbf{u}_p = (1; -3; 2) \quad \mathbf{n}_\rho = (1; 1; 1)$$

$\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}_\rho = (1; -3; 2) \cdot (1; 1; 1) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow p$  je s rovinou  $\rho$  rovnoběžná nebo v ní leží.  
 $1 + 2 + 2 + 2 = 7 \neq 0 \Rightarrow$  bod  $A$  v rovině  $\rho$  neleží  $\Rightarrow$  přímka  $p$  je s rovinou  $\rho$  rovnoběžná.

**Př. 3:** Najdi rovinu  $\sigma$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho: 2x - y + z + 2 = 0$  a leží v ní jedna z přímek  $p = \{[3t; -1 - 2t; 2 - t], t \in R\}$ ,  $q = \{[3 - s; 3; 2 + 2s], s \in R\}$ .

$$\mathbf{u}_p = (3; -2; -1) \quad \mathbf{u}_q = (-1; 0; 2) \quad \mathbf{n}_\rho = (2; -1; 1)$$

- $\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}_\rho = (3; -2; -1) \cdot (2; -1; 1) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 7 \Rightarrow$  přímka  $p$  není rovnoběžná s rovinou  $\rho$ .
- $\mathbf{u}_q \cdot \mathbf{n}_\rho = (-1; 0; 2) \cdot (2; -1; 1) = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$  přímka  $q$  rovnoběžná s rovinou  $\rho$ .

$\mathbf{n}_\sigma = \mathbf{n}_\rho = (2; -1; 1)$  rovnice  $2x - y + z + d = 0$  Bod  $B[3; 3; 2]$  z přímky  $q$ :  
 $2 \cdot 3 - 3 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -5$ . Rovina  $\sigma$  má obecnou rovnici  $2x - y + z - 5 = 0$ .

**Př. 4:** Urči vzájemnou polohu přímky  $AB$ ,  $A[0; 0; 4]$ ,  $B[-2; 2; 0]$  a roviny  $\rho: x + 2y - z + 1 = 0$ . Pokud je přímka s rovinou různoběžná, najdi jejich průsečík.

$$B - A = (-2; 2; -4) \Rightarrow \mathbf{u}_{AB} = (1; -1; 2) \Rightarrow AB: \{[t; -t; 4 + 2t], t \in R\}.$$

Zjišťujeme rovnoběžnost přímky  $AB$  a roviny  $\rho: \mathbf{u}_{AB} = (1; -1; 2) \quad \mathbf{n}_\rho = (1; 2; -1)$

$$\mathbf{u}_{AB} \cdot \mathbf{n}_\rho = (1; -1; 2) \cdot (1; 2; -1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -3 \Rightarrow \text{různoběžná.}$$

Dosadíme z druhé, třetí a čtvrté rovnice do první:  $x + 2y - z + 1 = t + 2(-t) - (4 + 2t) + 1 = 0$ .

$$x = t = -1$$

$$-3t - 3 = 0 \quad t = -1 \quad \text{Vypočteme souřadnice průsečíku: } y = -t = -(-1) = 1$$

$$z = 4 + 2t = 4 + 2(-1) = 2$$

Přímka  $AB$  se protne s rovinou  $\rho$  v bodě  $P[-1; 1; 2]$ .

**Př. 5:** Najdi kolmý průmět přímky  $AB$  z předchozího příkladu do roviny  $\rho$  z předchozího příkladu.

- 1. bod - průsečík přímky  $AB$  s rovinou  $\rho$  (bod  $P[-1; 1; 2]$ )

- 2. bod - průsečík roviny  $\rho$  s přímkou, která je k ní kolmá a vede z libovolného bodu přímky  $AB$ .

$$x = t$$

$A[0;0;4]$ . Přímka kolmá k rovině  $\rho$  přes  $A[0;0;4]$ ,  $s_k = \mathbf{n}_\rho = (1;2;-1)$ :  $y = 2t$  .  
 $z = 4 - t$

Průsečík kolmice s rovinou:  $x + 2y - z + 1 = t + 2(2t) - (4 - t) + 1 = 0$ .  $6t = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Dopočítáme druhý průsečík  $Q$ :  $\Rightarrow Q\left[\frac{1}{2}; 1; \frac{7}{2}\right]$ .

Rovnice přímky  $PQ$ :  $Q - P = \left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{u}_{PQ} = (1; 0; 1)$ ,  $P[-1; 1; 2]$ .

$$x = -1 + t$$

Rovnice kolmého průměru přímky  $AB$  do roviny  $\rho =$  přímky  $PQ$ :  $y = 1$  .  
 $z = 2 + t, t \in R$

**Př. 6:** Urči vzájemnou polohu přímky  $p = \{[1+t; 2-2t; 3+3t], t \in R\}$  a roviny  $\rho = \{[1-s+2r; 2+2s; 3-r], s, r \in R\}$ .

$$\mathbf{u}_\rho = (-1; 2; 0) - 1; 2 \Rightarrow \mathbf{u}_\rho \times \mathbf{v}_\rho = (-2 - 0; 0 - 1; 0 - 4) = (-2; -1; -4) \Rightarrow \mathbf{n}_\rho = (2; 1; 4)$$

$$\mathbf{v}_\rho = (2; 0; -1) 2; 0$$

$\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{u}_p = (2; 1; 4) \cdot (1; -2; 3) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow$  přímka  $p$  je s rovinou  $\rho$  různoběžná.

**Př. 7:** Urči hodnoty parametrů  $a, b$  tak, aby přímka  $p = \{[1-t; a-2t; 2+2t], t \in R\}$  ležela v rovině  $\rho: 2x + by - z + 4 = 0$ .

- přímka  $p$  je s rovinou  $\rho$  rovnoběžná  $\Rightarrow$  směrový vektor přímky  $\mathbf{u} = (-1; -2; 2)$  je kolmý na normálový vektor roviny  $\mathbf{n} = (2; b; -1)$ :  
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (-1; -2; 2) \cdot (2; b; -1) = -2 - 2b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2$
- libovolný bod přímky  $p$  leží v rovině  $\rho \Rightarrow$  dosadíme bod  $A[1; a; 2]$  do rovnice roviny  $\rho$ :  $2 \cdot 1 - 2 \cdot a - 2 + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$ .

Zadání úlohy splňuje přímka  $p = \{[1-t; 2-2t; 2+2t], t \in R\}$  a rovina  $\rho: 2x - 2y - z + 4 = 0$ .

**Př. 8:** Urči společné body roviny  $\rho: 2x - y + z + 1 = 0$  a přímky  $p = \{[1+t; 1+4t; -2+2t], t \in R\}$ . Z počtu nalezených bodů urči vzájemnou polohu.

Dosadíme do první rovnice:  $2(1+t) - (1+4t) + (-2+2t) + 1 = 0$

$2 + 2t - 1 - 4t - 2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow$  Rovina  $\rho$  má s přímkou  $p$  nekonečně mnoho společných bodů  $\Rightarrow$  přímka  $p$  leží v rovině  $\rho$ .

**Př. 9:** Petáková:  
 strana 117/cvičení 33  
 strana 117/cvičení 35  
 strana 117/cvičení 36 a) c)