7.4.6 Polohové úlohy v prostoru I

Předpoklady: 7405

Pedagogická poznámka: polohové úlohy jsou sice rozepsány do dvou hodin, ale pokud chcete, aby převážnou část příklady spočítala větší část třídy, budete potřebovat hodiny tři.

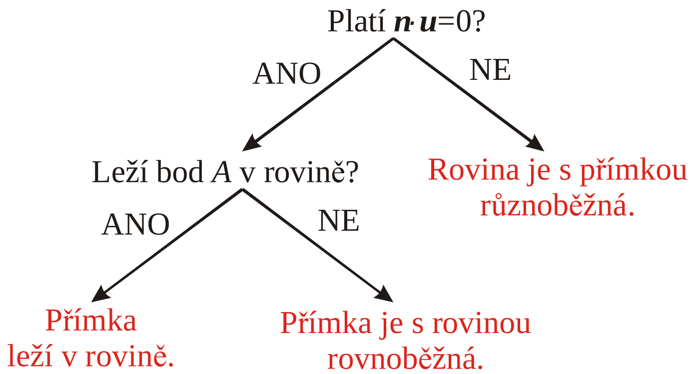
Př. 1: Jaká může být v prostoru vzájemná poloha přímky a roviny? Jakým způsobem určíme vzájemnou polohu parametricky zadané přímky a roviny dané obecnou rovnicí? Nakresli diagram, který zachytí postup při určování vzájemné polohy roviny a přímky.

Tři možnosti vzájemné polohy:

- přímka je s rovinou různoběžná (její směrový vektor není kolmý na normálový vektor roviny),
- přímka je s rovinou rovnoběžná (její směrový vektor je kolmý na normálový vektor roviny, ale přímka nemá s rovinou žádný společný bod),
- přímka leží v rovině (její směrový vektor je kolmý na normálový vektor roviny, a všechny body přímky leží v rovině).

Jak postupovat?

Máme přímku $p(A;\boldsymbol{u})$ a rovinu $\rho(B;\boldsymbol{n})$.



Pedagogická poznámka: Stejně jako ve všech podobných příkladech snažte se studenty dotlačit k tomu, aby si situace modelovali pomocí lavice, sešitů a tužek. Mechanicky uvažující studenti mají tendenci okopírovat postup pro vzájemnou polohu dvou přímek a rozhodovat se podle toho, zda jsou vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}$ rovnoběžné.

Př. 2: Urči vzájemnou polohu přímky $p=\{[1+t;2-3t;2+2t],t\in R\}$ a roviny $\rho: x+y+z+2=0$. Pokud je přímka s rovinou různoběžná, najdi jejich průsečík.

$\boldsymbol{u}_p=(1;-3;2)$ $\qquad$ $\boldsymbol{n}_\rho=(1;1;1)$

Vypočteme skalární součin: $\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{n}_\rho=(1;-3;2)\cdot(1;1;1)=1\cdot1-3\cdot1+2\cdot1=0 \Rightarrow$ přímka p je s rovinou ρ rovnoběžná nebo v ní leží.

Zjistíme, zda v rovině leží bod $A[1;2;2]$ z parametrického vyjádření přímky *p*:
$1+2+2+2=7\neq 0 \Rightarrow$ bod *A* v rovině ρ neleží $\Rightarrow$ přímka *p* je s rovinou ρ rovnoběžná.

Př. 3: Najdi rovinu σ, která je rovnoběžná s rovinou $\rho: 2x-y+z+2=0$ a leží v ní jedna z přímek $p=\{[3t;-1-2t;2-t],t\in R\}$, $q=\{[3-s;3;2+2s],s\in R\}$.

Rovina σ je rovnoběžná s rovinou ρ $\Rightarrow$ jako normálové můžeme u obou použít stejné vektory.
Pokud má přímka *p* nebo *q* ležet v rovině σ, musí být rovnoběžná s rovinou ρ $\Rightarrow$ zjistíme přes skalární součin.
$\boldsymbol{u}_p=(3;-2;-1)$ $\boldsymbol{u}_p=(-1;0;2)$ $\boldsymbol{n}_\rho=(2;-1;1)$

- $\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{n}_\rho=(3;-2;-1)\cdot(2;-1;1)=3\cdot 2-2\cdot(-1)-1\cdot 1=7$ $\Rightarrow$ přímka *p* není rovnoběžná s rovinou ρ.
- $\boldsymbol{u}_q\cdot\boldsymbol{n}_\rho=(-1;0;2)\cdot(2;-1;1)=(-1)\cdot 2+0\cdot(-1)+2\cdot 1=0$ $\Rightarrow$ přímka *q* rovnoběžná s rovinou ρ.

$\Rightarrow$ Hledáme rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ, ve které leží přímka *q*, $\Rightarrow$ rovina σ musí obsahovat libovolný bod přímky *q*.
$\boldsymbol{n}_\sigma=\boldsymbol{n}_\rho=(2;-1;1)$ rovnice $2x-y+z+d=0$
Dosadíme bod $B[3;3;2]$ z parametrického vyjádření přímky *q*: $2\cdot 3-3+2+d=0\Rightarrow d=-5$.
Rovina σ má obecnou rovnici $2x-y+z-5=0$.

Pedagogická poznámka: Překvapilo mě, že studenti neměli ani tak problém s tím, že musí nejdříve ověřit, zda je některá z přímek rovnoběžná s rovinou ρ, jako s tím, aby pak sestavili danou rovinu. Automaticky se totiž snažili upotřebit směrový vektor přímky *q*. Měli podvědomý pocit, že když už ji vybrali, měli by z ní zužitkovat více než jen jeden bod.

Př. 4: Urči vzájemnou polohu přímky *AB*, $A[0;0;4]$, $B[-2;2;0]$ a roviny $\rho: x+2y-z+1=0$. Pokud je přímka s rovinou různoběžná, najdi jejich průsečík.

Nejdříve najdeme parametrické vyjádření přímky *AB*:
$B-A=(-2;2;-4) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{AB}=(1;-1;2) \Rightarrow AB:\{[t;-t;4+2t],t\in R\}$.
Zjišťujeme rovnoběžnost přímky *AB* a roviny ρ:
$\boldsymbol{u}_{AB}=(1;-1;2)$ $\boldsymbol{n}_\rho=(1;2;-1)$
$\boldsymbol{u}_{AB}\cdot\boldsymbol{n}_\rho=(1;-1;2)\cdot(1;2;-1)=1\cdot 1-1\cdot 2+2\cdot(-1)=-3$ $\Rightarrow$ přímka *AB* je s rovinou ρ různoběžná.
Hledáme průsečík, vyhovuje rovnicím přímky i roviny $\Rightarrow$ soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých:
$$\begin{aligned} x+2y-z+1&=0\\ x&=t\\ y&=-t\\ z&=4+2t \end{aligned}.$$
Dosadíme z druhé, třetí a čtvrté rovnice do první: $x+2y-z+1=t+2(-t)-(4+2t)+1=0$.

$-3t-3=0$
$t=-1$

Vypočteme souřadnice průsečíku: $\begin{aligned} x &= t = -1 \\ y &= -t = -(-1) = 1 \\ z &= 4+2t = 4+2(-1) = 2 \end{aligned}$.

Přímka *AB* se protne s rovinou ρ v bodě $P[-1;1;2]$.

Př. 5: Najdi kolmý průmět přímky *AB* z předchozího příkladu do roviny ρ z předchozího příkladu.

Kolmý průmět přímky *AB* do roviny ρ = přímka, která leží v rovině ρ $\Rightarrow$ potřebujeme dva body:

- 1. bod - průsečík přímky *AB* s rovinou ρ (bod $P[-1;1;2]$)
- 2. bod - průsečík roviny ρ s přímkou, která je k ní kolmá a vede z libovolného bodu přímky *AB*.

$\Rightarrow$ Zvolíme libovolný bod přímky *AB*, nejjednodušší $A[0;0;4]$.

Přímka kolmá k rovině ρ procházející bodem $A[0;0;4]$, $\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{n}_\rho = (1;2;-1)$: $\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= 4-t \end{aligned}$.

Průsečík kolmice s rovinou: $x+2y-z+1 = t+2(2t)-(4-t)+1 = 0$.

$6t = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Dopočítáme druhý průsečík *Q*: $\begin{aligned} x &= t = \frac{1}{2} \\ y &= 2t = 1 \\ z &= 4-t = \frac{7}{2} \end{aligned}$ $\Rightarrow Q\left[\frac{1}{2};1;\frac{7}{2}\right]$.

Rovnice přímky *PQ*: $Q-P = \left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{PQ} = (1;0;1)$, $P[-1;1;2]$.

Rovnice kolmého průměru přímky *AB* do roviny ρ = přímky *PQ*: $\begin{aligned} x &= -1+t \\ y &= 1 \\ z &= 2+t, t \in R \end{aligned}$.

Př. 6: Urči vzájemnou polohu přímky $p = \{[1+t;2-2t;3+3t], t \in R\}$ a roviny $\rho = \{[1-s+2r;2+2s;3-r], s,r \in R\}$.

Rovina je dána parametricky $\Rightarrow$ nemáme normálový vektor. Bez něj by bylo rozhodování komplikované $\Rightarrow$ spočítáme si ho vektorovým součinem.

$\boldsymbol{u}_\rho = (-1;2;0)-1;2$
$\boldsymbol{v}_\rho = (2;0;-1)2;0$
$\Rightarrow \boldsymbol{u}_\rho \times \boldsymbol{v}_\rho = (-2-0;0-1;0-4) = (-2;-1;-4) \Rightarrow \boldsymbol{n}_\rho = (2;1;4)$

Skalární součin $\boldsymbol{n}_\rho = (2;1;4)$ a $\boldsymbol{u}_p = (1;-2;3)$:

$\boldsymbol{n}_\rho \cdot \boldsymbol{u}_p = (2;1;4)\cdot(1;-2;3) = 2\cdot1+1\cdot(-2)+4\cdot3 = 12$
$\Rightarrow$ přímka p je s rovinou ρ různoběžná.

Pedagogická poznámka: Hodně studentů počítá ještě i průsečík. Připomínám jim, že se zbytečně zdržují, protože v zadání takový požadavek není a pro určení vzájemné polohy průsečík nepotřebujeme.

Př. 7: Urči hodnoty parametrů *a*, *b* tak, aby přímka $p = \{[1-t; a-2t; 2+2t], t \in R\}$ ležela v rovině $\rho: 2x+by-z+4=0$.

Přímka *p* leží v rovině ρ:

- přímka *p* je s rovinou ρ rovnoběžná $\Rightarrow$ směrový vektor přímky $\boldsymbol{u} = (-1;-2;2)$ je kolmý na normálový vektor roviny $\boldsymbol{n} = (2;b;-1)$:
  $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = (-1;-2;2)(2;b;-1) = -2-2b-2 = 0 \;\Rightarrow\; b=-2$
- libovolný bod přímky *p* leží v rovině ρ $\Rightarrow$ dosadíme bod $A[1;a;2]$ do rovnice roviny ρ: $2\cdot1-2\cdot a-2+4=0 \;\Rightarrow\; a=2$.

Zadání úlohy splňuje přímka $p = \{[1-t; 2-2t; 2+2t], t\in R\}$ a rovina $\rho: 2x-2y-z+4=0$.

Př. 8: Urči společné body roviny $\rho: 2x-y+z+1=0$ a přímky $p = \{[1+t; 1+4t; -2+2t], t \in R\}$. Z počtu nalezených bodů urči vzájemnou polohu.

Hledáme společné body $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} 2x-y+z+1&=0\\ x&=1+t\\ y&=1+4t\\ z&=-2+2t \end{aligned}.$$

Dosadíme do první rovnice: $2(1+t)-(1+4t)+(-2+2t)+1=0$
$2+2t-1-4t-2+2t+1=0$
$0=0 \;\Rightarrow$ Rovina ρ má s přímkou *p* nekonečně mnoho společných bodů $\Rightarrow$ přímka *p* leží v rovině ρ.

Př. 9: Petáková:
strana 117/cvičení 33
strana 117/cvičení 35
strana 117/cvičení 36 a) c)

Shrnutí: Vzájemnou polohu přímky a roviny určíme pomocí směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny (skalárním součinem).