

7.4.4 Obecná rovnice roviny I

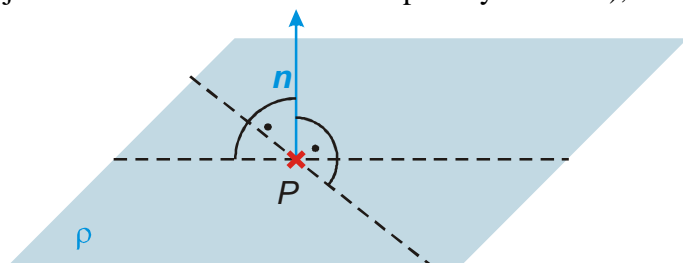
Předpoklady: 7403

V minulé hodině jsme vytvořili parametrické vyjádření roviny $X = A + tu + sv, t \in R, s \in R$. Zjišťovat z parametrického vyjádření roviny totožnost nebo rovnoběžnost není žádný med \Rightarrow zkusíme najít jiný způsob vyjádření roviny.

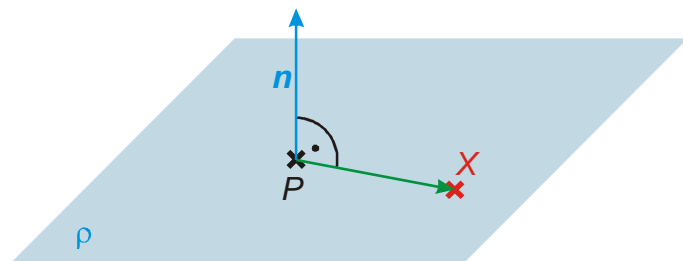
Víme:

- v prostoru neexistuje obecná rovnice přímky (předminulá hodina, spousta důvodů),
 - rovnice $z = 0$ (podobná obecné rovnici přímky v rovině) je rovnicí souřadné roviny xy
- \Rightarrow zkusíme vytvořit obecnou rovnici roviny v prostoru.

Jiný způsob zadání roviny: směr, který je k rovině kolmý (normálový směr, s jeho pomocí jsme odvodili obecnou rovnici přímky v rovině), a bod.



Jak poznáme, že bod X leží v rovině ρ ?



Vektor $X - P$ je kolmý na normálový vektor $\mathbf{n} \Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový:
 $(X - P) \cdot \mathbf{n} = 0$ (stejně jako při odvozování obecné rovnice přímky).

Př. 1: Je dán bod P a vektor \mathbf{n} . Najdi rovnici, kterou splňují body roviny, která prochází bodem P a má normálový vektor \mathbf{n} . Příklad řeš nejdříve konkrétně pro bod $P[-2; 3; 2]$ a vektor $\mathbf{n} = (1; -1; 4)$ a poté obecně do dvou sloupců vedle sebe.

Body: $X[x; y; z], P[-2; 3; 2]$.

Vektory: $(X - P) = (x + 2; y - 3; z - 2)$,
 $\mathbf{n} = (1; -1; 4)$.

Skalární součin je nulový: $(X - P) \cdot \mathbf{n} = 0$.

$$(x + 2; y - 3; z - 2)(1; -1; 4) = 0$$

$$1 \cdot (x + 2) - 1 \cdot (y - 3) + 4(z - 2) = 0$$

Body: $X[x; y; z], P[p_1; p_2; p_3]$.

Vektory: $(X - P) = (x - p_1; y - p_2; z - p_3)$,
 $\mathbf{n} = (a; b; c)$.

Skalární součin je nulový: $(X - P) \cdot \mathbf{n} = 0$.

$$(x - p_1; y - p_2; z - p_3)(a; b; c) = 0$$

$$a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$$

$$\begin{aligned}x+2-y+3+4z-8 &= 0 \\x-y+4z-3 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ax-ap_1+by-bp_2+cz-cp_3 &= 0 \\ax+by+cz-ap_1-bp_2-cp_3 &= 0 \\ax+by+cz+d &= 0\end{aligned}$$

- Ke každé rovině ρ v prostoru lze najít taková čísla a, b, c, d aby $X[x; y; z] \in \rho$ právě když $ax+by+cz+d=0$.
- Pro každou čtveřici reálných čísel a, b, c, d , kde alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, je množina všech bodů $X[x; y; z]$, pro které platí $ax+by+cz+d=0$, rovina.

Rovnice $ax+by+cz+d=0$, kde alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, se nazývá **obecná rovnice roviny**. Čísla a, b, c jsou souřadnice normálového vektoru $\mathbf{n}=(a;b;c)$ této roviny, číslo d získáme dosazením libovolného bodu roviny do rovnice.

Př. 2: Najdi obecnou rovnici roviny σ , která je rovnoběžná s rovinou ρ z předchozího příkladu a prochází bodem $S[1;3;-2]$. Porovnej rovnice obou rovin.

Rovina je rovnoběžná \Rightarrow musí mít stejný normálový vektor (nebo násobek normálového vektoru) jako rovina ρ .

$$\mathbf{n}=(1;-1;4) \Rightarrow \text{rovnice } x-y+4z+d=0$$

$$\text{Dosadíme bod } S[1;3;-2]: 1-3+4(-2)+d=0.$$

$$d=10$$

$$\sigma: x-y+4z+10=0$$

Př. 3: Najdi obecnou rovnici roviny ABC : $A[2;1;3]$, $B[3;3;1]$, $C[1;2;5]$. Dosazením všech bodů do rovnice zkontroluj správnost výsledku.

Problém: nemáme normálový vektor.

Co máme?

Tři body, z nichž můžeme spočítat dva směrové vektory, které nejsou rovnoběžné, normálový vektor je na oba kolmý \Rightarrow normálový vektor můžeme spočítat pomocí vektorového součinu.

Určíme dva směrové vektory:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (1;2;-2) \quad 1;2$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = (-1;1;2) \quad -1;1$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (4+2; 2-2; 1+2) = (6;0;3) \Rightarrow \mathbf{n} = (2;0;1)$$

$$\text{Rovnice: } 2x+z+d=0.$$

$$\text{Dosadíme bod } A: 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -7.$$

$$\text{Rovina } ABC \text{ má rovnici: } 2x+z-7=0.$$

$$\text{Zkusíme další body: } B[3;3;1]: 2 \cdot 3 + 1 - 7 = 0$$

$$C[1;2;5]: 2 \cdot 1 + 5 - 7 = 0.$$

Př. 4: Najdi obecnou rovnici roviny ρ , která je kolmá na přímkou

$p = \{[1-t; 3-2t; 3t]; t \in R\}$ a prochází bodem $A[1; 2; 3]$. Urči, zda v rovině ρ leží body $K[0; 2; -2]$ a $L[-2; 1; 3]$.

Rovina ρ je kolmá na přímkou $p \Rightarrow$ směrový vektor přímky p je normálovým vektorem roviny $\rho \Rightarrow \mathbf{n}_\rho = (1; 2; -3)$.

Rovnice roviny: $x + 2y - 3z + d = 0$.

Dosadíme bod $A[1; 2; 3]$: $1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = 4$.

ρ : $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Dosadíme bod $K[0; 2; -2]$: $0 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow$ bod K neleží v rovině ρ .

Dosadíme bod $L[-2; 1; 3]$: $-2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 4 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ bod L neleží v rovině ρ .

Př. 5: Najdi obecnou rovnici roviny ABC : $A[1; 1; -2]$, $B[1; 3; -3]$, $C[0; 1; 1]$. Dopačítej souřadnice bodů $M[0; ?; 2]$ a $N[?; 1; ?]$ tak, aby oba body ležely v rovině ABC .

Normálový vektor získáme vektorovým součinem dvou směrových vektorů roviny.

$$\mathbf{u} = B - A = (0; 2; -1)$$

$$\mathbf{v} = C - A = (-1; 0; 3)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (6 - 0; 1 - 0; 0 - (-2)) = (6; 1; 2) \Rightarrow \mathbf{n} = (6; 1; 2)$$

Rovnice: $6x + y + 2z + d = 0$.

Dosadíme bod $C[0; 1; 1]$: $6 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

Obecná rovnice roviny ABC : $6x + y + 2z - 3 = 0$.

Dosadíme bod $M[0; y; 2]$: $2 \cdot 0 + y + 2 \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ souřadnice bodu $M[0; -1; 2]$.

Dosadíme bod $N[x; 1; z]$: $6x + 1 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow 3x + z = 1 \Rightarrow$ nekonečně mnoho možností pro souřadnice bodu $N \Rightarrow$ zvolíme souřadnici x a z dopočítáme $x = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$ souřadnice bodu $N[0; 1; 1]$.

Dodatek: Volbu hodnoty x -ové souřadnice můžeme provést také obecně a získat tak všechna možná řešení pro hledání souřadnic bodu N : $x = t \Rightarrow z = 1 - 3t \Rightarrow$ souřadnice bodu $N[t; 1; 1 - 3t], t \in R$. Nalezené body tvoří přímku ležící v rovině ABC .

Př. 6: Najdi průsečík roviny $\rho: 2x + y + 2z - 2 = 0$ s přímkou $p = \{[1+t; -2; 3-2t], t \in R\}$.

Průsečík – bod, který vyhovuje rovnicím obou útvarů \Rightarrow řešíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$x = 1 + t$$

$$y = -2$$

$$z = 3 - 2t$$

\Rightarrow dosadíme z prvních tří rovnic do čtvrté rovnice.

$$2x + y + 2z - 2 = 0$$

$$2(1+t) - 2 + 2(3-2t) - 2 = 0$$

$$2 + 2t - 2 + 6 - 4t - 2 = 0$$

$$4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2$$

Dopočteme souřadnice průsečíku:

$$x = 1 + t = 1 + 2 = 3$$

$$y = -2$$

$$z = 3 - 2t = 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

Přímka p se s rovinou ρ protíná v bodě $P[3; -2; -1]$.

Př. 7: Jsou dány přímky $p = \{[1-t; 3-2t; 3t]; t \in \mathbb{R}\}$ a $q = \{[-t; 3; 2+t]; t \in \mathbb{R}\}$. Najdi obecnou rovnici roviny ρ , která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q .

K sestavení obecné rovnice roviny potřebujeme normálový vektor a bod (nejlepší případ) nebo dva směrové vektory a bod.

- Rovina obsahuje přímku $p \Rightarrow$ směrový vektor přímky p je také směrovým vektorem roviny.
- Rovina je rovnoběžná s přímkou $q \Rightarrow$ směrový vektor přímky q je také směrovým vektorem roviny.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p = (-1; -2; 3) - 1; -2$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_q = (-1; 0; 1) - 1; 0$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-2 - 0; -3 + 1; 0 - 2) = (-2; -2; -2) \Rightarrow \mathbf{n} = (1; 1; 1)$$

Rovnice: $x + y + z + d = 0$.

Dosadíme bod $P[1; 3; 0]$: $1 + 3 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -4$

Obecná rovnice roviny ρ : $x + y + z - 4 = 0$.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu jsou tradičně největší problémy s představou o zadání. Snažím se, aby si studenti samostatně bez mého vybízení situace modelovali pomocí tužek a sešitů.

Př. 8: Petáková:
strana 115/cvičení 19 a) c)
strana 116/cvičení 20 a)

Shrnutí: Rovinu v prostoru můžeme popsat pomocí obecné rovnice $ax + by + cz + d = 0$. Tato rovnice má analogické použití jako obecná rovnice přímky v rovině.