

### 7.3.16 Další metrické úlohy II

**Př. 1:** Najdi přímku rovnoběžnou s osou I a III kvadrantu vzdálenou od bodu  $A[-1;2]$   $2\sqrt{2}$ .

Osou I a III kvadrantu je přímka  $y = x \Rightarrow$  přímky s ní rovnoběžné mají rovnici  $x - y + c = 0$ .

Vzdálenost přímky od bodu  $A[-1;2]$ :  $\frac{|-1 - (-2) + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{|1+c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow |1+c| = 4$

$|c+1| = |c - (-1)| = 4 \Rightarrow c_1 = 3 \Rightarrow$  přímka  $x - y + 3 = 0$ ,  $c_2 = -5 \Rightarrow$  přímka  $x - y - 5 = 0$ .

**Př. 2:** Které z přímek, procházejících bodem  $T[-1;1]$  mají od bodu  $K[6;2]$  vzdálenost 5?

$(y - y_0) = k(x - x_0)$ . Dosadíme bod  $T[-1;1] \Rightarrow (y-1) = k(x - [-1])$  ( $+ x = -1$ ).

Převědeme na obecnou rovnici:  $y - 1 = kx + k \Rightarrow kx - y + k + 1 = 0$ .

Určujeme vzdálenost od bodu  $K[6;2]$ :  $\frac{|k \cdot 6 - 2 + k + 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 5$ .  $\frac{|7k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5 \quad /^2$

$$\frac{49k^2 - 14k + 1}{k^2 + 1} = 25 \quad / (k^2 + 1) \quad 49k^2 - 14k + 1 = 25(k^2 + 1) \quad 24k^2 - 14k - 24 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 24 \cdot (-24)}}{2 \cdot 24} = \frac{14 \pm \sqrt{2500}}{48} = \frac{14 \pm 50}{48}$$

$$k_1 = \frac{14 + 50}{48} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3} \quad k_2 = \frac{14 - 50}{48} = \frac{-36}{48} = -\frac{3}{4}$$

$$p_1: (y-1) = \frac{4}{3}(x+1) \quad p_2: (y-1) = -\frac{3}{4}(x+1)$$

$$3y - 3 = 4x + 4 \quad 4y - 4 = -3x - 3$$

$$p_1: 4x - 3y + 7 = 0 \quad p_2: 3x + 4y - 1 = 0$$

**Př. 3:** Jsou dány body  $A[-3;1], B[5;-3]; C[4;1]; D[0;3]$ .

a) Dokaž, že body  $A, B, C, D$  určují lichoběžník.

b) Vypočti velikost úhlu  $\alpha$ .

c) Urči výšku lichoběžníku.

**a) Dokaž, že body  $A, B, C, D$  určují lichoběžník.**

$$B - A = (8; -4) \quad C - D = (4; -2)$$

$\Rightarrow$  platí  $(B - A) = 2(C - D) \Rightarrow$  strany  $AB$  a  $CD$  jsou rovnoběžné.

$$D - A = (3; 2) \quad C - B = (-1; 4)$$

$\Rightarrow$  neplatí  $(D - A) = k(C - B) \Rightarrow$  strany  $AD$  a  $BC$  nejsou rovnoběžné.

**b) Vypočti velikost úhlu  $\alpha$ .**

$$B - A = (8; -4) \Rightarrow \mathbf{u} = (2; -1), |\mathbf{u}| = \sqrt{5}. \quad D - A = (3; 2) \Rightarrow \mathbf{v} = (3; 2), |\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{(2; -1) \cdot (3; 2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{6 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 60^\circ 15'$$

**c) Urči výšku lichoběžníku.**

Obecná rovnice přímky  $AB$ :  $B - A = (8; -4) \Rightarrow \mathbf{u} = (2; -1) \Rightarrow \mathbf{n} = (1; 2)$ .

Rovnice  $x + 2y + c = 0$ , dosadíme bod  $A[-3;1]$ :  $-3 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$ .

$$\text{Vzdálenost bodu } D[0;3] \text{ od přímky } x + 2y + 1 = 0: \frac{|0 + 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

**Př. 4:** Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ ,  $c = 7$  cm,  $b = 5$  cm,  $v_c = 4$  cm. Urči výšku  $v_b$ .

- bod  $A$  umístíme do počátku soustavy souřadnic  $\Rightarrow A[0;0]$ ,
- stranu  $c$  umístíme na osu  $x \Rightarrow B[7;0]$ .

V trojúhelníku platí  $v_c = 4$  cm  $\Rightarrow$  bod  $C$  musí ležet na přímce rovnoběžné s osou  $x$ , vzdálené od ní 4 cm  $\Rightarrow$  bod  $C$  leží na přímce  $y = 4 \Rightarrow$  souřadnice bodu  $C[c;4]$ .

Poslední známá vlastnost trojúhelníka  $ABC$ :  $b = |AC| = 5$  cm.  $\sqrt{(c-0)^2 + (4-0)^2} = 5$

$$c^2 + 16 = 25 \quad c^2 = 9 \Rightarrow \text{dvě řešení:}$$

$c_1 = -3$  - nevyhovuje zadání, úhel  $BAC$  by byl určitě tupý.

$$c_2 = 3 \Rightarrow C[3;4]$$

Obecná rovnice přímky  $AC$ :  $C - A = (3;4) \Rightarrow \mathbf{n} = (4;-3) \Rightarrow$  rovnice  $3x - 4y + c = 0$ ,

bod  $A[0;0] \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$  rovnice  $3x - 4y = 0$ .

$$\text{Vzdálenost bodu } B[7;0] \text{ od přímky } 3x - 4y = 0: \frac{|3 \cdot 7 - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{21}{5}$$

**Př. 5:** Urči vrcholy čtverce pokud znáš souřadnice středu čtverce  $S[-1;0]$  a rovnici přímky  $p: x - 2y + 6 = 0$ , na které leží strana  $CD$ .

$$\text{Přímka } q: \mathbf{u}_q = \mathbf{n}_p = (1;-2), \text{ bod } S[-1;0] \Rightarrow q: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t, t \in R \end{cases}$$

Dosadíme do první rovnice:  $-1 + t - 2(-2t) + 6 = 0$ .

$$5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \text{souřadnice bodu } P: \begin{cases} x = -1 + t = -1 - 1 = -2 \\ y = -2t = -2(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow P[-2;2].$$

Výpočet vektorů:  $\mathbf{u} = S - P = (1;-2)$ ,  $\mathbf{v} = (2;1)$ .

Výpočet vrcholů:  $C = P + \mathbf{v} = [-2;2] + (2;1) = [0;3]$ ,  $D = P - \mathbf{v} = [-2;2] - (2;1) = [-4;1]$

$A = D + 2\mathbf{u} = [-4;1] + 2(1;-2) = [-2;-3]$ ,  $B = C + 2\mathbf{u} = [0;3] + 2(1;-2) = [2;-1]$

Čtverec  $ABCD$  má vrcholy v bodech  $A[-2;-3]$ ,  $B[2;-1]$ ,  $C[0;3]$ ,  $D[-4;1]$ .

**Př. 6:** Najdi vrcholy obdélníku  $ABCD$ , pokud znáš souřadnice bodů  $A[0;-2]$ ,  $C[6;6]$  a rovnici přímky  $p: x - 3y - 12 = 0$ , na které leží bod  $B$ .

1. rovnice: Bod  $B$  leží na přímce  $p: x - 3y - 12 = 0$ .

2. rovnice: skalární součin je nulový:  $(B - A) \cdot (B - C) = 0$ .

$$B - A = (x - 0; y + 2), B - C = (x - 6; y - 6), (B - A) \cdot (B - C) = (x; y + 2) \cdot (x - 6; y - 6) = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 12 = 0. \text{ Dosadíme z první rovnice: } x - 3y - 12 = 0 \Rightarrow x = 3y + 12.$$

$$(3y + 12)^2 - 6(3y + 12) + y^2 - 4y - 12 = 0 \quad 10y^2 + 50y + 60 = 0 \quad /:10$$

$$y^2 + 5y + 6 = (y + 3)(y + 2) = 0 \Rightarrow \text{dvě řešení:}$$

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = -2$$

$$x_1 = 3y + 12 = 3 \cdot (-3) + 12 = 3 \Rightarrow B_1[3;-3]$$

$$x_2 = 3y + 12 = 3 \cdot (-2) + 12 = 6 \Rightarrow B_2[6;-2]$$

$$D_1 = C + (A - B_1) = [6;6] + (-3;1) = [3;7]$$

$$D_2 = C + (A - B_2) = [6;6] + (-6;0) = [0;6]$$

Hledanými vrcholy obdélníka jsou body  $B_1[3;-3]$ ,  $D_1[3;7]$  nebo  $B_2[6;-2]$ ,  $D_2[0;6]$ .