7.3.16 Další metrické úlohy II

Př. 1: Najdi přímku rovnoběžnou s osou I a III kvadrantu vzdálenou od bodu $A[-1;2]$ $2\sqrt{2}$.

Osou I a III kvadrantu je přímka $y = x$ $\Rightarrow$ přímky s ní rovnoběžné mají rovnici $x - y + c = 0$.

Vzdálenost přímky od bodu $A[-1;2]$: $\frac{|-1-(-2)+c|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$. $\frac{|1+c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ $/\cdot\sqrt{2}$

$|c+1| = |c-(-1)| = 4$ $\Rightarrow$ $c_1 = 3$ $\Rightarrow$ přímka $x - y + 3 = 0$, $c_2 = -5$ $\Rightarrow$ přímka $x - y - 5 = 0$.

Př. 2: Které z přímek, procházejících bodem $T[-1;1]$ mají od bodu $K[6;2]$ vzdálenost 5?

$(y - y_0) = k(x - x_0)$. Dosadíme bod $T[-1;1]$ $\Rightarrow$ $(y-1) = k(x-[-1])$ (+ $x = -1$).

Převedeme na obecnou rovnici: $y - 1 = kx + k$ $\Rightarrow$ $kx - y + k + 1 = 0$.

Určujeme vzdálenost od bodu $K[6;2]$: $\frac{|k\cdot 6 - 2 + k + 1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 5$. $\frac{|7k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$ $/^2$

$\frac{49k^2 - 14k + 1}{k^2+1} = 25$ $/(k^2+1)$ $49k^2 - 14k + 1 = 25(k^2+1)$ $24k^2 - 14k - 24 = 0$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 24\cdot(-24)}}{2\cdot 24} = \frac{14 \pm \sqrt{2500}}{48} = \frac{14 \pm 50}{48}$$

$k_1 = \frac{14+50}{48} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}$ $k_2 = \frac{14-50}{48} = \frac{-36}{48} = -\frac{3}{4}$

$p_1: (y-1) = \frac{4}{3}(x+1)$ $p_2: (y-1) = -\frac{3}{4}(x+1)$

$3y - 3 = 4x + 4$ $4y - 4 = -3x - 3$

$p_1: 4x - 3y + 7 = 0$ $p_2: 3x + 4y - 1 = 0$

Př. 3: Jsou dány body $A[-3;1], B[5;-3]; C[4;1]; D[0;3]$.

a) Dokaž, že body *A*, *B*, *C*, *D* určují lichoběžník.

b) Vypočti velikost úhlu α. c) Urči výšku lichoběžníku.

a) Dokaž, že body *A*, *B*, *C*, *D* určují lichoběžník.

$B - A = (8;-4)$ $C - D = (4;-2)$

$\Rightarrow$ platí $(B-A) = 2(C-D)$ $\Rightarrow$ strany *AB* a *CD* jsou rovnoběžné.

$D - A = (3;2)$ $C - B = (-1;4)$

$\Rightarrow$ neplatí $(D-A) = k(C-B)$ $\Rightarrow$ strany *AD* a *BC* nejsou rovnoběžné.

b) Vypočti velikost úhlu α.

$B - A = (8;-4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u} = (2;-1)$, $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{5}$. $D - A = (3;2)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} = (3;2)$, $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$.

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} = \frac{(2;-1)(3;2)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{6-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 60°15'$$

c) Urči výšku lichoběžníku.

Obecná rovnice přímky *AB*: $B - A = (8;-4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u} = (2;-1)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n} = (1;2)$.

Rovnice $x + 2y + c = 0$, dosadíme bod $A[-3;1]$: $-3 + 2\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$.

Vzdálenost bodu $D[0;3]$ od přímky $x + 2y + 1 = 0$: $\frac{|0 + 2\cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Př. 4: Je dán ostroúhlý trojúhelník *ABC*, $c = 7\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $v_c = 4\,\text{cm}$. Urči výšku v_b.

- bod *A* umístíme do počátku soustavy souřadnic $\Rightarrow$ $A[0;0]$,
- stranu *c* umístíme na osu *x* $\Rightarrow$ $B[7;0]$.

V trojúhelníku platí $v_c = 4\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ bod *C* musí ležet na přímce rovnoběžné s osou *x*, vzdálené od ní 4 cm $\Rightarrow$ bod *C* leží na přímce $y = 4$ $\Rightarrow$ souřadnice bodu $C[c;4]$.

Poslední známá vlastnost trojúhelníka *ABC*: $b = |AC| = 5\,\text{cm}$. $\sqrt{(c-0)^2 + (4-0)^2} = 5$

$c^2 + 16 = 25$ $\qquad$ $c^2 = 9$ $\Rightarrow$ dvě řešení:

$c_1 = -3$ - nevyhovuje zadání, úhel BAC by byl určitě tupý.

$c_2 = 3$ $\Rightarrow$ $C[3;4]$

Obecná rovnice přímky *AC*: $C - A = (3;4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n} = (4;-3)$ $\Rightarrow$ rovnice $3x - 4y + c = 0$,

bod $A[0;0]$ $\Rightarrow$ $c = 0$ $\Rightarrow$ rovnice $3x - 4y = 0$.

Vzdálenost bodu $B[7;0]$ od přímky $3x - 4y = 0$: $\dfrac{|3 \cdot 7 - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{21}{5}$

Př. 5: Urči vrcholy čtverce pokud znáš souřadnice středu čtverce $S[-1;0]$ a rovnici přímky $p: x - 2y + 6 = 0$, na které leží strana *CD*.

Přímka *q*: $\boldsymbol{u}_q = \boldsymbol{n}_p = (1;-2)$, bod $S[-1;0] \Rightarrow q$: $\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = -2t, t \in R \end{array}$

Dosadíme do první rovnice: $-1 + t - 2(-2t) + 6 = 0$.

$5t + 5 = 0$ $\Rightarrow$ $t = -1$ $\Rightarrow$ souřadnice bodu P: $\begin{array}{l} x = -1 + t = -1 - 1 = -2 \\ y = -2t = -2(-1) = 2 \end{array}$ $\Rightarrow$ $P[-2;2]$.

Výpočet vektorů: $\boldsymbol{u} = S - P = (1;-2)$, $\boldsymbol{v} = (2;1)$.

Výpočet vrcholů: $C = P + \boldsymbol{v} = [-2;2] + (2;1) = [0;3]$, $D = P - \boldsymbol{v} = [-2;2] - (2;1) = [-4;1]$

$A = D + 2\boldsymbol{u} = [-4;1] + 2(1;-2) = [-2;-3]$, $B = C + 2\boldsymbol{u} = [0;3] + 2(1;-2) = [2;-1]$

Čtverec *ABCD* má vrcholy v bodech $A[-2;-3]$, $B[2;-1]$, $C[0;3]$, $D[-4;1]$.

Př. 6: Najdi vrcholy obdélníku *ABCD*, pokud znáš souřadnice bodů $A[0;-2]$, $C[6;6]$ a rovnici přímky $p: x - 3y - 12 = 0$, na které leží bod *B*.

1. rovnice: Bod *B* leží na přímce $p: x - 3y - 12 = 0$.

2. rovnice: skalární součin je nulový: $(B - A) \cdot (B - C) = 0$.

$B - A = (x - 0; y + 2)$, $B - C = (x - 6; y - 6)$, $(B - A) \cdot (B - C) = (x; y + 2) \cdot (x - 6; y - 6) = 0$

$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 12 = 0$. Dosadíme z první rovnice: $x - 3y - 12 = 0 \Rightarrow x = 3y + 12$.

$(3y + 12)^2 - 6(3y + 12) + y^2 - 4y - 12 = 0$ $\qquad$ $10y^2 + 50y + 60 = 0 \quad / :10$

$y^2 + 5y + 6 = (y + 3)(y + 2) = 0$ $\Rightarrow$ dvě řešení:

$y_1 = -3$ $\qquad$ $y_2 = -2$

$x_1 = 3y + 12 = 3 \cdot (-3) + 12 = 3$ $\Rightarrow$ $B_1[3;-3]$ $\qquad$ $x_2 = 3y + 12 = 3 \cdot (-2) + 12 = 6$ $\Rightarrow$ $B_2[6;-2]$

$D_1 = C + (A - B_1) = [6;6] + (-3;1) = [3;7]$ $\qquad$ $D_2 = C + (A - B_2) = [6;6] + (-6;0) = [0;6]$

Hledanými vrcholy obdélníka jsou body $B_1[3;-3]$, $D_1[3;7]$ nebo $B_2[6;-2]$, $D_2[0;6]$.