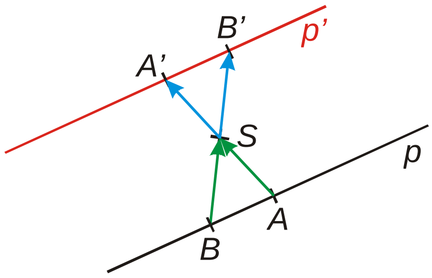
7.3.15 Další metrické úlohy I

Předpoklady: 7313, 7314

Pedagogická poznámka: Za normálních okolností není příliš pravděpodobné, že by většina studentů byla schopna přijít samostatně na řešení většiny úloh (jsou značně rozdílné a velká část z nich vyžaduje nápad). Používám proto trošku jinou strategii. Na začátku hodiny si projdeme všechny příklady a společně navrhneme řešení. Nejsme úplně konkrétní (většinou si říkáme body, které jsou v jednotlivých příkladech uvedeny tučně). Studenti si při tom udělají poznámky (přibližně tučný text v řešení úloh bez rovnic) a poté řeší úlohy samostatně. Já běhám mezi nimi a pomáhám v místech, kde si nejsou jistí.

Př. 1: Je dána přímka $p: 2x - y + 1 = 0$. Najdi přímku, která je s přímkou *p* středově souměrná podle středu $S[-2;1]$.

Přímku můžeme najít pomocí dvou bodů. Pro každý bod v rovině platí: $X' = S + (S - X)$ $\Rightarrow$ **najdeme na přímce *p* dva body, zobrazíme je a s jejich pomocí najdeme rovnici přímky** p'.



Hledáme body na přímce *p*:

- $A[0;?] \Rightarrow 2\cdot 0 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A[0;1]$,
- $B[1;?] \Rightarrow 2\cdot 1 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[1;3]$.

Najdeme obrazy určených bodů:

- $A' = S + (S - A) = [-2;1] + (-2;0) = [-4;1]$,
- $B' = S + (S - B) = [-2;1] + (-3;-2) = [-5;-1]$.

Určíme rovnici přímky $A'B'$: $(B' - A') = (-1;-2) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (2;-1)$.

Rovnice: $2x - y + c = 0 \Rightarrow$ dosadíme bod A': $2\cdot(-4) - 1\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 9$.

Rovnice přímky $A'B'$: $2x - y + 9 = 0$.

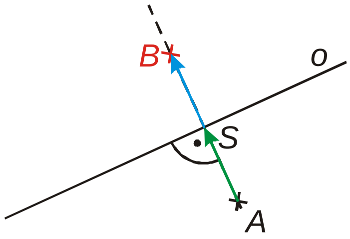
Dodatek: Mohli bychom také spočítat souřadnice pouze jednoho bodu a udělat obraz přímky jako rovnoběžku procházející tímto bodem.

Pedagogická poznámka: Největším problémem je tradičně místo, kde je více možností – zvolení bodů na přímce *p*.

Př. 2: Najdi obraz B bodu $A[4;-4]$ v osové souměrnosti podle osy $o: x-3y+4=0$.

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby.

Řešení napodobením geometrické konstrukce



1. Narýsujeme kolmici p na přímku o procházející bodem A.
2. Najdeme průsečík S přímky p s osou o.
3. Na přímce p sestrojíme bod B tak, aby bod S byl středem úsečky AB.

1. Kolmice *p* na přímku *o* procházející bodem *A*

$\boldsymbol{n}_o = \boldsymbol{u}_p = (1;-3) \Rightarrow$ přímka p: $\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = -4-3t; t \in R \end{array}$

2. Průsečík *S* přímky *p* s osou $o: x-3y+4=0$

přímka p: $\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = -4-3t; t \in R \end{array}$

Spočteme průsečík dosazením do rovnice pro osu o.

$(4+t)-3(-4-3t)+4=0$

$4+t+12+9t+4=0$

$10t=-20$

$t=-2$

Dopočteme souřadnice průsečíku S: $\begin{array}{l} x = 4+t = 4-2 = 2 \\ y = -4-3t = -4-3(-2) = 2 \end{array} \Rightarrow S[2;2]$.

3. Na přímce *p* sestrojíme bod *B* tak, aby bod *S* byl středem úsečky *AB*.

Platí: $B = S+(S-A)$ $\qquad S-A=(-2;6)$

$B = S+(S-A) = [2;2]+(-2;6) = [0;8]$

Obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou o je bod $B=[0;8]$.

Řešení zapsáním podmínek, které musí splňovat souřadnice hledaného bodu *B*.

Hledaný bod $B[b_1;b_2] \Rightarrow$ musíme najít dvě podmínky na sestavení dvou rovnic.

1. podmínka: Střed úsečky AB **leží na ose** $o: x-3y+4=0$.

Střed úsečky AB $A[4;-4]$, $B[b_1;b_2]$: $S\left[\frac{4+b_1}{2};\frac{-4+b_2}{2}\right]$.

Dosadíme do rovnice osy o: $\left(\frac{4+b_1}{2}\right)-3\left(\frac{-4+b_2}{2}\right)+4=0$.

2. podmínka: Vektor *AB* je kolmý na osu *o*.

$B-A=(b_1-4;b_2+4)$ $\qquad \boldsymbol{n}_o=(1;-3) \Rightarrow \boldsymbol{u}_o=(3;1)$

$\boldsymbol{u}_o(B-A)=0 \Rightarrow (3;1)(b_1-4;b_2+4)=3(b_1-4)+1(b_2+4)=0$

Zjednodušíme obě rovnice:

$\left(\frac{4+b_1}{2}\right)-3\left(\frac{-4+b_2}{2}\right)+4=0 \quad / \cdot 2$

$(4+b_1)-3(-4+b_2)+8=0$

$3(b_1-4)+1(b_2+4)=0$

$3b_1-12+b_2+4=0$

$3b_1+b_2=8$

$4+b_1+12-3b_2+8=0$

$b_1-3b_2=-24$

Vyřešíme soustavu dosazovací metodou:

$b_1-3b_2=-24 \Rightarrow b_1=3b_2-24$

$3(3b_2-24)+b_2=8$

$9b_2-72+b_2=8$

$10b_2=80$

$b_2=8$

$b_1=3b_2-24=3\cdot 8-24=0$

Obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou o je bod $B=[0;8]$.

Pedagogická poznámka: Občas si studenti stěžují, že je zbytečné počítat jeden příklad dvěma způsoby. Pokud by nám šlo o výsledek, pak mají určitě pravdu. Naším cílem je ale nácvik toho, jak se můžeme postavit k různým problémům. Pak mají oba způsoby své oprávnění.

Př. 3: Na přímce $p:3x-4y-2=0$ najdi body, jejichž vzdálenost od bodu $S[2;1]$ je 5.

Hledané body jsou body, které leží na přímce $3x-4y-2=0$ a zároveň na kružnici $k(S;5)$ $\Rightarrow$ úloha bude mít žádné, jedno nebo dvě řešení (možnosti pro průsečíky přímky s kružnicí).
Hledáme bod $X[x;y]$ $\Rightarrow$ dvě neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice:

- **Bod** $X[x;y]$ **leží na přímce** p**:** $3x-4y-2=0$**.**
- **Vzdálenost bodu** $X[x;y]$ **od bodu** $S[2;1]$ **je pět:** $|SX|=\sqrt{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2}=5$.

Dosadíme a upravíme druhou rovnici:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=5 \quad /^2$

$(x-2)^2+(y-1)^2=25$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1=25$

$x^2-4x+y^2-2y=20$

Řešíme soustavu: $\begin{matrix} 3x-4y-2=0 \\ x^2-4x+y^2-2y=20 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé:

$3x-4y-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{4y+2}{3}$

$\left(\dfrac{4y+2}{3}\right)^2-4\left(\dfrac{4y+2}{3}\right)+y^2-2y=20 \quad /\cdot 9$

$16y^2+16y+4-48y-24+9y^2-18y=180$

$25y^2-50y-200=0$

$y^2-2y-8=0$

$(y-4)(y+2)=0$

$y_1 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4y_1 + 2}{3} = \frac{4 \cdot 4 + 2}{3} = 6 \Rightarrow X_1[6;4]$

$y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{4y_2 + 2}{3} = \frac{4 \cdot (-2) + 2}{3} = -2 \Rightarrow X_2[-2;-2]$

Př. 4: Najdi bod tak, aby byl trojúhelník *ABC* pravoúhlý s přeponou *AB*, kde $A[-3;2], B[7;-3]$, a aby platilo $|AC| = 5$.

Hledáme bod $C[x;y]$ tak, aby byly splněny dvě podmínky (zapíšeme je rovnicemi).

1. Úhel ACB je pravoúhlý

$\Rightarrow$ vektory $C - A$ a $C - B$ jsou kolmé $\Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový

$C - A = (x+3; y-2)$ $\qquad$ $C - B = (x-7; y+3)$

$(C - A) \cdot (C - B) = (x+3; y-2)(x-7; y+3) = 0$

$x^2 - 7x + 3x - 21 + y^2 + 3y - 2y - 6 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0$

2. strana AC má délku 5

$|AC| = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 5$

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{c} x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0 \end{array}$.

$$\begin{array}{lr} & x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0 \\ [\![1]\!] - [\![2]\!] & -10x + 5y - 15 = 0 \quad /:5 \end{array} \Rightarrow -2x + y = 3 \Rightarrow y = 2x + 3$$

Dosadíme do první rovnice: $\left(\frac{15-5y}{2}\right)^2 + y^2 - 4 \cdot \frac{15-5y}{2} + y - 27 = 0$

$x^2 + (2x+3)^2 - 4x + (2x+3) - 27 = 0$

$x^2 + 4x^2 + 12x + 9 - 4x + 2x + 3 - 27 = 0$

$5x^2 + 10x - 15 = 0 \quad /:5$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

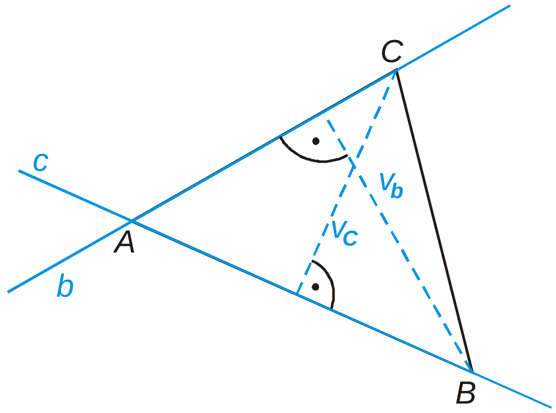
$(x+3)(x-1) = 0$

$x_1 = -3 \Rightarrow y = 2x + 3 = 2(-3) + 3 = -3 \Rightarrow C[-3;-3]$

$x_2 = 1 \Rightarrow y = 2x + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \Rightarrow C[1;5]$

Př. 5: Najdi vrcholy trojúhelníka *ABC*, pokud známe: obecné rovnice dvou stran $b: x - 2y + 7 = 0$ a $c: x + y + 1 = 0$ a velikosti výšek $v_b = \frac{21\sqrt{5}}{5}$, $v_c = 3\sqrt{2}$.

Nakreslíme si obrázek.



Bod A najdeme jako průsečík přímek b a c.
Bod B najdeme jako bod, který:

- leží na přímce c,
- je od přímky b vzdálený v_b.

Bod C najdeme jako bod, který:

- leží na přímce b,
- je od přímky c vzdálený v_c.

Hledání bodu A jako průsečíku přímek b a c

Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{r} x-2y+7=0 \\ x+y+1=0 \\ \hline \end{array}$.

$[\![2]\!]-[\![1]\!] \qquad 3y-6=0 \Rightarrow y=2$

Dopočteme: $x+2+1=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow A[-3;2]$.

Určujeme bod $B[b_1;b_2]$.

Leží na přímce c: $b_1+b_2+1=0$.

Vzdálenost bodu $B[b_1;b_2]$ od přímky b se rovná $\frac{21\sqrt{5}}{5}$: $\frac{|b_1-2b_2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{21\sqrt{5}}{5}$.

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: $b_1+b_2+1=0 \Rightarrow b_1=-1-b_2$,

$\frac{|-1-b_2-2b_2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{21\sqrt{5}}{5} \quad /\cdot 5$

$\sqrt{5}|6-3b_2|=21\sqrt{5} \quad /:\sqrt{5}$

$3|2-b_2|=21 \quad /:3 \qquad$ (použijeme $|2-b_2|=|b_2-2|$

$|b_2-2|=7 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 7 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $b_2=9 \Rightarrow b_1=-1-b_2=-1-9=-10 \Rightarrow B_1[-10;9]$
- $b_2=-5 \Rightarrow b_1=-1-b_2=-1-(-5)=4 \Rightarrow B_2[4;-5]$

Určujeme bod $C[c_1;c_2]$.

Leží na přímce b: $c_1-2c_2+7=0$.

Vzdálenost bodu $C[c_1;c_2]$ od přímky c se rovná $3\sqrt{2}$: $\frac{|c_1+c_2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: $c_1-2c_2+7=0 \Rightarrow c_1=2c_2-7$,

$\frac{|2c_2-7+c_2+1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2} \quad /\cdot\sqrt{2}$

$|3c_2-6|=6$

$3|c_2-2|=6 \quad /:3 \qquad$ (použijeme $|2-b_2|=|b_2-2|$

$|c_2-2|=2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 2 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $c_2=4 \Rightarrow c_1=2c_2-7=2\cdot 4-7=1 \Rightarrow C_1[1;4]$

- $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 2c_2 - 7 = 2 \cdot 0 - 7 = -7 \Rightarrow C_2[0;-7]$

Podmínky zadání splňují všechny trojúhelníky *ABC*, které získáme kombinací vrcholů $A[-3;2]$, $B_1[-10;9]$, $B_2[4;-5]$, $C_1[1;4]$, $C_2[0;-7]$. Příklad má tedy $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ řešení.

Pedagogická poznámka: Označení $B[b_1;b_2]$ používám místo $B[b_x;b_y]$ schválně. U slabších studentů pomáhá k vytváření chaosu v závěru příkladu, kde se objevují dvě řešení. Cílem je opět to, aby se orientovali v příkladu a uvědomili si, že index b_1 znamená *x*-vou souřadnici a ne první ze dvou řešení.

Př. 6: Petáková:
strana 111 cvičení 91
strana 111 cvičení 92
strana 111 cvičení 96
strana 111 cvičení 99

Shrnutí: