

7.3.14 Odchylka přímek

Předpoklady: 7208, 7306

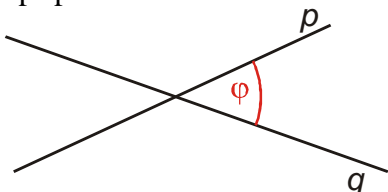
Př. 1: Zopakuj a porovnej definici a možné hodnoty:

- a) planimetricky zavedené odchylky přímek
- b) úhlu vektorů zavedeného v analytické geometrii.

Na základě porovnání navrhní postup pro výpočet odchylky přímek v analytické geometrii.

Planimetrická odchylka přímek

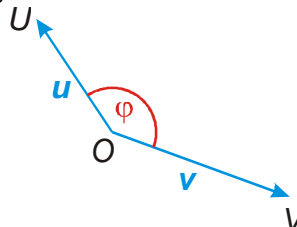
- v případě různoběžek velikost ostrého nebo pravého úhlu
- v případě rovnoběžek nula



$$\varphi \in \langle 0; 90 \rangle$$

Úhel vektorů

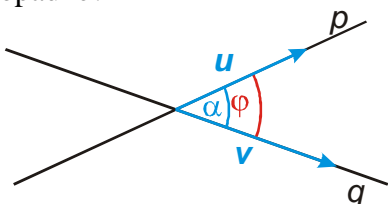
Velikost konvexního úhlu UOV , který vznikne z umístění vektorů u a v do orientovaných úseček OU a OV .



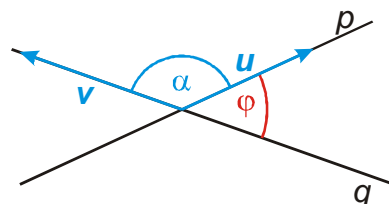
$$\varphi \in \langle 0; 180 \rangle \quad \cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

- Skalární součin vektorů umožňuje snadno určit úhel, který vektory svírají.
- Směr přímek je určen pomocí směrových vektorů.

⇒ Můžeme využít skalární součin směrových vektorů na výpočet odchylky přímek. Jak to dopadne?



Odchylka přímek se rovná úhlu směrových vektorů.



Pro odchylku přímek platí: $\varphi = 180^\circ - \alpha$.

Možná řešení:

- Když vyjde tupý úhel, obrátíme jeden z vektorů.
- Když vyjde tupý úhel, dopočítáme odchylku do 180° .
- Zamezíme hodnotám nad 90° . Pro tyto hodnoty platí $\cos \varphi < 0$. ⇒ Zabráníme tomu, aby byla hodnota zlomku záporná ⇒ čítec zlomku dáme do absolutní hodnoty (tím zároveň zabráníme tomu, aby odchylka závisela na orientaci směrového vektoru).

Odchylka přímek p, q se směrovými vektory u, v je číslo $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které

$$\text{platí } \cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}.$$

Př. 2: Urči odchylku přímek p, q : $p: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t, t \in R \end{cases}$, $q = \{[2 - t; 3 + t], t \in R\}$.

Potřebujeme směrové vektory:

$$p: \mathbf{u} = (2; -3) \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \qquad q: \mathbf{v} = (-1; 1) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2; -3) \cdot (-1; 1) = -2 - 3 = -5$$

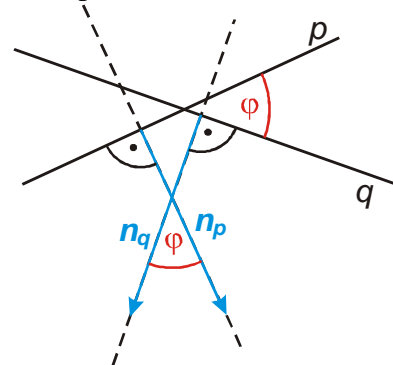
$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{13} \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{13} \sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 11^\circ 19'$$

Odchylka přímek p, q je $\varphi = 11^\circ 19'$.

Př. 3: Urči odchylku přímek $p: 2x - y + 3 = 0$ a $q: 3x + 2y - 1 = 0$.

Obě přímky jsou zadány obecnou rovnicí \Rightarrow známe normálové vektory.

Je to problém?



Nemusíme je převádět na směrové vektory, protože odchylka přímek p a q , je stejná jako odchylka přímek, které jsou na ně kolmé (a které mají za směrové vektory normálové vektory přímek p a q).

$$\mathbf{n}_p = (2; -1) \Rightarrow |\mathbf{n}_p| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \qquad \mathbf{n}_q = (3; 2) \Rightarrow |\mathbf{n}_q| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = (2; -1) \cdot (3; 2) = 6 - 2 = 4$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q|}{|\mathbf{n}_p| |\mathbf{n}_q|} = \frac{|4|}{\sqrt{5} \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{13}} \Rightarrow \varphi = 60^\circ 15'$$

Odchylka přímek p, q je $\varphi = 60^\circ 15'$.

Př. 4: Urči odchylku přímek AB a p . $A[-3; 1]$, $B[1; 2]$, $p: 2x - y + 3 = 0$.

Pro určení odchylky přímek můžeme požit dvojici směrových nebo normálových vektorů \Rightarrow z normálového vektoru přímky p vypočteme její směrový vektor.

$$\mathbf{u}_{AB} = B - A = (4; 1) \Rightarrow |\mathbf{u}_{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\mathbf{n}_p = (2; -1) \Rightarrow \mathbf{u}_p = (1; 2) \Rightarrow |\mathbf{u}_p| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{u}_{AB} \cdot \mathbf{u}_p = (4; 1) \cdot (1; 2) = 4 + 2 = 6$$

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u}_{AB} \cdot \mathbf{u}_p|}{|\mathbf{u}_{AB}| |\mathbf{u}_p|} = \frac{|6|}{\sqrt{17} \sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{17} \sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 49^\circ 24'$$

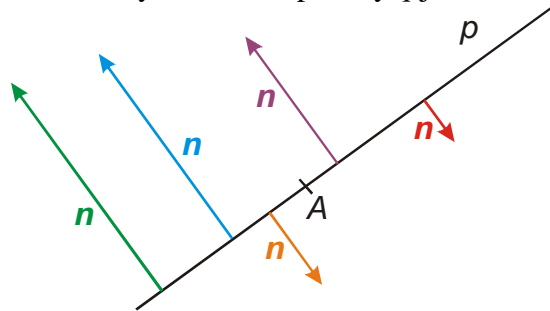
Odchylka přímek AB a p je $\varphi = 49^\circ 24'$.

Př. 5: Je dána přímka $p: x - 3y - 2 = 0$. Najdi přímku q , která prochází bodem $Q[1;1]$, jejíž odchylka od přímky p je 45° .

Odchylku přímek určují směrové nebo normálové vektory.

$$\mathbf{n}_p = (1; -3) \Rightarrow |\mathbf{n}_p| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

Normálových vektorů přímky q je nekonečně mnoho:



\Rightarrow musíme si vybrat, který z nich chceme spočítat, abychom získali jednoznačný výsledek.

Hledáme například takový, který má x -ovou souřadnici rovnou jedné (pokud nejsou normálové vektory svislé $\mathbf{n} = (0; k)$ určitě je jeden z vektorů s x -ovou souřadnicí rovnou jedné normálovým vektorem přímky p).



$$\Rightarrow \text{Volíme: } \mathbf{n}_q = (1; y) \Rightarrow |\mathbf{n}_q| = \sqrt{1^2 + y^2}.$$

$$\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = (1; -3) \cdot (1; y) = 1 - 3y$$

$$\cos \varphi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q|}{|\mathbf{n}_p| |\mathbf{n}_q|} = \frac{|1 - 3y|}{\sqrt{10} \sqrt{1 + y^2}} \quad (\text{Zde je dobře vidět, že kdybychom si nezvolili}$$

hodnotu x -ové souřadnice, nemohli bychom příklad vyřešit, protože bychom měli pouze jedinou rovnici na určení dvou neznámých.)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 - 3y|}{\sqrt{10} \sqrt{1 + y^2}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{10} \sqrt{1 + y^2} = 2|1 - 3y|$$

$$2\sqrt{5} \sqrt{1 + y^2} = 2|1 - 3y|$$

$$\sqrt{5(1 + y^2)} = |1 - 3y| \quad /^2 \quad (\text{Umocněním se zbavíme odmocniny i absolutní hodnoty.})$$

$$5(1 + y^2) = (1 - 3y)^2$$

$$5 + 5y^2 = 1 - 6y + 9y^2$$

$$4y^2 - 6y - 4 = 0$$

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$y_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \Rightarrow \mathbf{n}_{q_1} = (1; 2)$$

$$y_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{n}_{q_2} = (1; -0,5) \Rightarrow \mathbf{n}_{q_2} = (2; -1)$$

⇒ Existují dvě přímky, které splňují zadání.

q_1 :

$$\mathbf{n}_{q_1} = (1; 2) \Rightarrow x + 2y + c = 0$$

$$\text{Dosadíme } Q[1; 1] \Rightarrow 1 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow$$

$$c = -3.$$

$$q_1: x + 2y - 3 = 0$$

q_2 :

$$\mathbf{n}_{q_2} = (2; -1) \Rightarrow 2x - y + c = 0$$

$$\text{Dosadíme } Q[1; 1] \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow$$

$$c = -1.$$

$$q_2: 2x - y - 1 = 0$$

Zadání příkladu splňují přímky $q_1: x + 2y - 3 = 0$ a $q_2: 2x - y - 1 = 0$.

Pedagogická poznámka: Diskuse o zvolení jedné souřadnice normálového vektoru

$\mathbf{n}_q = (1; y)$ je důležitá. Podobných případů, kdy musíme spočítat něco nejednoznačného (například směrové vektory) je mnoho a je dobré, když studenti chápou důvod, proč je nutné souřadnici zvolit.

Dodatek: Můžeme si ukázat, jak by řešení příkladu probíhalo, kdybychom si vybrali jiný směrový vektor:

$$\text{Volíme: } \mathbf{n}_q = (2; y) \Rightarrow |\mathbf{n}_q| = \sqrt{2^2 + y^2}, \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = (1; -3) \cdot (2; y) = 2 - 3y$$

$$\cos \varphi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q|}{|\mathbf{n}_p| |\mathbf{n}_q|} = \frac{|2 - 3y|}{\sqrt{10} \sqrt{4 + y^2}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{10} \sqrt{4 + y^2} = 2|2 - 3y|$$

$$5(4 + y^2) = (2 - 3y)^2 \Rightarrow 20 + 5y^2 = 4 - 12y + 9y^2 \Rightarrow 4y^2 - 12y - 16 = 0$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow (y - 4)(y + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = 4, \mathbf{n}_{q_1} = (1; 2) \text{ nebo } y_2 = -1, \mathbf{n}_{q_2} = (2; -1)$$

Můžeme také zvolit y -ovou souřadnici a dopočítat x -ovou:

$$\mathbf{n}_q = (x; 1) \Rightarrow |\mathbf{n}_q| = \sqrt{x^2 + 1^2}, \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = (1; -3) \cdot (x; 1) = x - 3$$

$$\cos \varphi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q|}{|\mathbf{n}_p| |\mathbf{n}_q|} = \frac{|x - 3|}{\sqrt{10} \sqrt{x^2 + 1^2}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{10} \sqrt{x^2 + 1^2} = 2|x - 3|$$

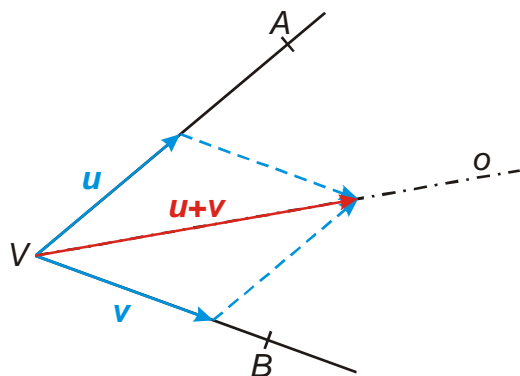
$$5(x^2 + 1^2) = (x - 3)^2 \Rightarrow 5x^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 4x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow$$

$$x_1 = -2, \mathbf{n}_{q_1} = (-2; 1) \text{ (stejný směr jako vektor } \mathbf{n}_{q_2} = (2; -1))$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \mathbf{n}_{q_2} = (0, 5; 1) \Rightarrow \mathbf{n}_{q_2} = (1; 2)$$

Př. 6: Jsou dány body $A[1;3]$, $B[-4;-1]$ a $V[-3;1]$. Najdi obecnou rovnici osy úhlu AVB .



Osa úhlu = „průměr směrů obou ramen“ \Rightarrow určíme vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} tak, aby platilo:

$$\mathbf{u} = k(\mathbf{A} - \mathbf{V}), k > 0 \quad \mathbf{v} = l(\mathbf{B} - \mathbf{V}), l > 0 \quad |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|.$$

Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ pak bude mít směr osy úhlu AVB .

- $\mathbf{A} - \mathbf{V} = (4; 2)$, $|\mathbf{A} - \mathbf{V}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$
- $\mathbf{B} - \mathbf{V} = (-1; -2)$, $|\mathbf{B} - \mathbf{V}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

\Rightarrow Vektor $\mathbf{A} - \mathbf{V}$ je dvakrát větší \Rightarrow zmenšíme ho na polovinu.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{V}) = \frac{1}{2}(4; 2) = (2; 1)$$

$$\mathbf{v} = 1(\mathbf{B} - \mathbf{V}) = (-1; -2)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (2; 1) + (-1; -2) = (1; -1) = \mathbf{u}_o$$

$$\mathbf{n}_o = (1; 1) \Rightarrow \text{rovnice } x + y + c = 0$$

$$\text{Dosadíme bod } V[-3; 1]: -3 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 2.$$

Osa úhlu AVB má obecnou rovnici: $x + y + 2 = 0$.

Př. 7: Petáková:

strana 108/cvičení 47 e) g)

strana 108/cvičení 48 a) b)

strana 108/cvičení 50

strana 108/cvičení 52

strana 110/cvičení 77

Shrnutí: Výpočet odchylky přímek je založen na určení odchylky směrových vektorů.
Hodnoty jsou menší než 90° .