7.3.13 Vzdálenost bodu od přímky II

Předpoklady: 7312

Pedagogická poznámka: Následující příklad navazuje na poslední příklad minulé hodiny. Snažím se, aby si studenti ujasnili, co je stejné, co je jinak a podle toho se zařídili.

Př. 1: Najdi přímku, která je rovnoběžná s přímkou $x-3y+2=0$ a je od ní vzdálena $\sqrt{10}$.

Hledaná přímka je rovnoběžná $\Rightarrow$ rovnice $x-3y+c=0$ $\Rightarrow$ potřebujeme najít bod, přes který přímka prochází $\Rightarrow$ hledáme bod vzdálený od přímky $x-3y+2=0$ o $\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ takových bodů je nekonečně mnoho $\Rightarrow$ musíme omezit výběr, například budeme hledat pouze body na ose *y*.

Bod na ose *y*: $A\left[0;a_y\right]$. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost:

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\cdot 0-3\cdot a_y+2|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\sqrt{10}$$

$$\frac{|-3a_y+2|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$ použijeme $|-3a_y+2|=|3a_y-2|$

$$|3a_y-2|=10$$

rovnice s absolutní hodnotou $\Rightarrow$ dělíme na intervaly

$$3a_y-2=0\Rightarrow a_y=\frac{2}{3}$$

$a_y\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right\rangle \Rightarrow$	$a_y\in\left\langle\frac{2}{3};\infty\right) \Rightarrow$
$3a_y-2\le 0 \Rightarrow |3a_y-2|=-3a_y+2$	$3a_y-2\ge 0 \Rightarrow |3a_y-2|=3a_y-2$
$-3a_y+2=10$	$3a_y-2=10$
$3a_y=-8$	$3a_y=12$
$a_y=-\frac{8}{3}$	$a_y=4$

$\Rightarrow$ dva body, které splňují podmínky:

$A_1[0;4]$

dosadíme do rovnice:

$x-3y+c=x-3\cdot 4+c=0\Rightarrow c=12$

$x-3y+12=0$

$A_2\left[0;-\frac{8}{3}\right]$

dosadíme do rovnice:

$x-3y+c=x-3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+c=0\Rightarrow c=-8$

$x-3y-8=0$

Zadání splňují přímky $p_1: x-3y+12=0$ a $p_2: x-3y-8=0$.

Pedagogická poznámka: Velká část studentů potřebuje diskusi o roli bodu *A* v řešení příkladu. Jde o to, aby si uvědomili, že bod *A* je pouze pomocným cílem k nalezení rovnic přímky a že si ho můžeme volit libovolně. Nic nám tedy nebrání si ho zvolit co nejjednodušeji.

Př. 2: Na přímce $x+3y-1=0$ najdi bod, který je od přímky $2x+y-7=0$ vzdálen $2\sqrt{5}$.

Podobný příklad jako dva předchozí. Bod *A* je však konečným cílem.
Souřadnice bodu $A\left[a_x;a_y\right]$

Bod *A* je od přímky $2x+y-7=0$ vzdálen $2\sqrt{5}$: $d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot a_x+a_y-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ máme dvě neznáme, ale zatím pouze jednu rovnici $\Rightarrow$ hledáme další informace v zadání.
Bod *A* leží na přímce $x+3y-1=0$ $\Rightarrow$ vyhovuje její rovnici $a_x+3\cdot a_y-1=0$ - druhá rovnice.

$a_x+3\cdot a_y-1=0 \Rightarrow a_x=1-3a_y$ dosadíme do první rovnice:

$$\frac{|2\cdot(1-3a_y)+a_y-7|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \quad / \cdot\sqrt{5}$$

$$|2-6a_y+a_y-7|=10$$

$$|-5a_y-5|=10$$

$$|-5||a_y+1|=10$$

$|a_y-(-1)|=2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od –1 o dva

$$a_{y1}=1 \Rightarrow a_x=1-3a_y=1-3\cdot 1=-2 \Rightarrow A_1[-2;1]$$

$$a_{y2}=-3 \Rightarrow a_x=1-3a_y=1-3\cdot(-3)=10 \Rightarrow A_2[10;-3]$$

Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$. Najdi přímku, která je s nimi rovnoběžná a má od obou stejnou vzdálenost.

Příklad je možné řešit dvěma způsoby: analyticky a napodobením konstrukce.
Analytické řešení:
Hledaná přímka je rovnoběžná s přímkou $2x-4y-5=0$ $\Rightarrow$ je popsána rovnicí $2x-4y+c=0$. Koeficient *c* určíme pomocí libovolného bodu na této přímce. Zvolíme si například bod s nulovou *x*-ovou souřadnicí: $2\cdot 0-4y+c=0 \Rightarrow y=\frac{c}{4}$.

Vzdálenost bodu $\left[0;\frac{c}{4}\right]$ je stejně vzdálen od přímek $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$.

$$\frac{\left|0-2\cdot\frac{c}{4}+6\right|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{\left|2\cdot 0-4\cdot\frac{c}{4}-5\right|}{\sqrt{2+(-4)^2}} \Rightarrow \frac{\left|-\frac{c}{2}+6\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|-c-5|}{\sqrt{20}} \quad / \cdot 2\sqrt{5}$$

$$2|-1|\left|\frac{c}{2}-6\right|=|-1||c+5|$$

$|c-12|=|c+5| \Rightarrow$ řešíme po intervalech:

- $c\in\left(-\infty;-5\right\rangle \Rightarrow -c+12=-c-5 \Rightarrow 17=0 \Rightarrow K=\emptyset$

- $c \in \langle -5;12 \rangle \Rightarrow -c+12=c+5 \Rightarrow 2c=\frac{7}{2} \Rightarrow c=\frac{7}{2}$
- $c \in \langle 12;\infty) \Rightarrow c-12=c+5 \Rightarrow -17=0 \Rightarrow K=\emptyset$

Hledanou přímkou je přímka $2x-4y+\frac{7}{2}=0$.

Konstrukční řešení:
rovnoběžku, která je osou pásu můžeme vést středem libovolné úsečky, která má krajní body na přímkách $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$.

- průsečík přímky $x-2y+6=0$ s osou *y*: $0-2y+6=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ bod $A[0;3]$
- průsečík přímky $2x-4y-5=0$ s osou *y*: $2\cdot 0-4y-5=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{4} \Rightarrow$ bod $B\left[0;-\frac{5}{4}\right]$

$3+\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{12-5}{4}=\frac{7}{4} \Rightarrow$ střed úsečky *AB*: $S_{AB}\left[0;\frac{7}{8}\right]$

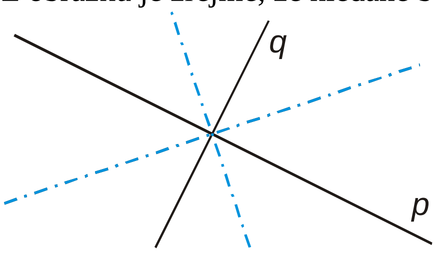
Rovnice rovnoběžky: $2x-4y+c=0$, dosadíme bod $S_{AB}\left[0;\frac{7}{8}\right]$: $2\cdot 0-4\cdot\frac{7}{8}+c=0 \Rightarrow c=\frac{7}{2}$

Osou pásu je přímka $2x-4y+\frac{7}{2}=0$.

Pedagogická poznámka: Studenti mají tendenci udělat průměr z koeficientů *c* v obou rovnicích, což je možné pouze v případě, že jsou obě rovnice postavené na stejném normálovém vektoru.

Př. 4: Najdi všechny body roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek $p: x+2y-3=0$ a $q: 2x-y-1=0$.

Z obrázku je zřejmé, že hledané body tvoří dvě přímky – osy obou úhlů, které přímky svírají.



. Zkusíme najít tyto přímky pomocí podmínky ze zadání.
Hledáme body $X[x;y]$.

Vzdálenost bodu $X[x;y]$ od přímky $p: x+2y-3=0$: $\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=0$.

Vzdálenost bodu $X[x;y]$ od přímky $q: 2x-y-1=0$: $\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=0$.

Obě vzdálenosti se rovnají: $\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}} \quad /:\sqrt{5}$

$|x+2y-3|=|2x-y-1| \Rightarrow$ musíme odstranit absolutní hodnoty. Dvě možnosti:

- umocnění: $(x+2y-3)^2=(2x-y-1)^2$ - získáme strašné výrazy na obou stranách, ověřování si ušetříme, obě strany byly před umocněním kladné
- odstranění absolutní hodnoty: výhodnější nepřibudou nám druhé mocniny

Jak zjistíme, kdy odstranit absolutní hodnoty, výrazy uvnitř jsou složité. Jsou jen čtyři možnosti, které rovnou vyzkoušíme:

- oba výrazy záporné: $|x+2y-3|=|2x-y-1| \Rightarrow -(x+2y-3)=-(2x-y-1)$
  $-x-2y+3=-2x+y+1$
  $x-3y+2=0$
- oba výrazy kladné: $|x+2y-3|=|2x-y-1| \Rightarrow x+2y-3=2x-y-1$
  $x-3y+2=0$ - stejná přímka jako v předchozím případě
- levý výraz kladný, pravý záporný: $|x+2y-3|=|2x-y-1| \Rightarrow$
  $x+2y-3=-(2x-y-1)$
  $x+2y-3=-2x+y+1$
  $3x+y-4=0$
- levý výraz záporný, pravý kladný: $|x+2y-3|=|2x-y-1| \Rightarrow$
  $-(x+2y-3)=2x-y-1$
  $-x-2y+3=2x-y-1$
  $3x+y-4=0$

Množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek $p: x+2y-3=0$ a $q: 2x-y-1=0$ tvoří dvojice přímek $x-3y+2=0$ a $3x+y-4=0$.

Př. 5: Petáková:
strana 109/cvičení 65
strana 109/cvičení 66
strana 109/cvičení 68
strana 109/cvičení 74

Shrnutí: