7.3.10 Úsekový tvar rovnice přímky

Předpoklady: 7306

Př. 1: Jakou podmínku splňují body ležící na ose *x*? Pomocí dvou bodů na ose *x* sestav parametrickou a obecnou rovnici této přímky.

Body na ose *x* například: $[2;0]$, $[15;0]$, $[-3;0]$ $\Rightarrow$ společná vlastnost: *y*-ová souřadnice je nulová (jde o body $[x;0]$)

Parametrické vyjádření: body $[1;0]$, $[2;0]$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}=(1;0)$, bod $[0,0]$

$x=0+t$
$y=0, t\in R$ (jasné, *x*-ová souřadnice bodů na ose *x* může být cokoliv, *y*-ová je nulová)

Obecná rovnice: $\boldsymbol{u}=(1;0)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(0;1)$ $\Rightarrow$ rovnice $0x+y+c=0$

Dosadíme bod $[0;0]$: $0+c=0$ $\Rightarrow$ $c=0$

Rovnice osy *x*: $y=0$ (jasné jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice)

Př. 2: Jakou podmínku splňují body ležící na ose *y*? Pomocí dvou bodů na ose *x* sestav parametrickou a obecnou rovnici této přímky.

Body na ose *y* například: $[0;1]$, $[0;1532]$, $[0;-562]$ $\Rightarrow$ společná vlastnost: *x*-ová souřadnice je nulová (jde o body $[0;y]$)

Parametrické vyjádření: Body $[0;1]$, $[0;2]$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}=(0;1)$, bod $[0,0]$

$x=0$
$y=0+t, t\in R$ (jasné, *y*-ová souřadnice bodů na ose *y* může být cokoliv, *x*-ová je nulová)

Obecná rovnice: $\boldsymbol{u}=(0;1)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(1;0)$ $\Rightarrow$ rovnice $x+0y+c=0$

Dosadíme bod $[0;0]$: $0+c=0$ $\Rightarrow$ $c=0$

Rovnice osy *y*: $x=0$ (jasné jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice)

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady nejsou zbytečné. Studenti sice již vyjadřovali (úplně na začátku) osy pomocí rovnic, ale jednak uplynulo hodně času a jednak se studenti naučili obecné postupy na sestavování rovnic přímky, které jim v předchozích případech (příliš mnoho nul) působí značné problémy.

Př. 3: Je dána přímka $p: 3x+4y-12=0$. Urči průsečíky přímky *p* s osami *x* a *y*.

Průsečík s osou *x* $\Rightarrow$ nulová *y*-ová souřadnice $\Rightarrow A[a_x;0]$.

Dosadíme bod $A[a_x;0]$ do rovnice přímky *p*: $3a_x+4\cdot 0-12=0$

$3a_x=12$

$a_x=4$ $\Rightarrow$ přímka *p* se protíná s osou *x* v bodě $A[4;0]$.

Průsečík s osou *y* $\Rightarrow$ nulová *x*-ová souřadnice $\Rightarrow B[0;b_y]$.

Dosadíme bod $B[0;b_y]$ do rovnice přímky p: $3\cdot 0+4\cdot b_y-12=0$

$4b_y=12$

$b_y=3 \Rightarrow$ přímka p se protíná s osou y v bodě $B[0;3]$.

Zkusíme si upravit rovnici přímky:

$3x+4y-12=0$

$3x+4y=12 \quad /:12$

$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ zajímavé: neznámé x a y jsou ve zlomcích, jejichž jmenovatele jsou souřadnicemi průsečíků se souřadnými osami – získali jsme **úsekový tvar rovnice přímky**

Př. 4: Dosazením ověř, zda platí, že přímka napsaná ve tvaru $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, kde $p\neq 0$ a $q\neq 0$ se protíná se souřadnými osami v bodech $P[p;0]$ a $Q[0;q]$.

Dosadíme $P[p;0]$:

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

$\frac{p}{p}+\frac{0}{q}=1$

$1=1$

Dosadíme $Q[0;q]$:

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

$\frac{0}{p}+\frac{q}{q}=1$

$1=1$

Jsou dány body $P[p;0]$ a $Q[0;q]$, kde $p\neq 0$ a $q\neq 0$ (tedy body P a Q jsou body na souřadnicových osách různé od počátku). Přímka PQ má rovnici $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

Je-li přímka napsaná ve tvaru $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, kde $p\neq 0$ a $q\neq 0$, protíná se souřadnými osami v bodech $P[p;0]$ a $Q[0;q]$.

Rovnice $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ se nazývá úsekový tvar přímky.

Př. 5: Rozhodni, které přímky není možné zapsat v úsekovém tvaru.

Jde o přímky, které nemají dva různé průsečíky se souřadnými osami:

- přímky rovnoběžné se souřadnými osami
- přímky procházející počátkem

Př. 6: Jsou dány body $A[-1;0]$ a $B[0;4]$. Zapiš rovnici přímky AB v úsekovém tvaru a ve tvaru obecné rovnice přímky.

Známe průsečíky se souřadnými osami $\Rightarrow$ můžeme sestavit úsekový tvar rovnice přímky.

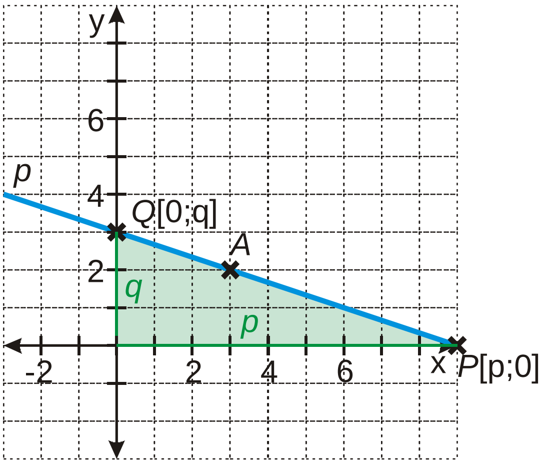
$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{4}=1$$

Obecnou rovnici získáme vynásobením: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{4}=1 \quad /\cdot(-4)$

$$4x-y=-4$$
$$4x-y+4=0$$

Př. 7: Je dán bod $A[3;2]$. Urči přímku p tak, aby procházela bodem A s spolu s osami určovala trojúhelník o obsahu 13,5.

Nakreslíme obrázek situace:



Body, ve kterých se přímka protíná s osami označíme $P[p;0]$ a $Q[0;q]$. Pokud určíme jejich souřadnice (čísla p a q) určíme i rovnici přímky $\Rightarrow$ potřebuji dvě rovnice.

1. Vzniklý trojúhelník je pravoúhlý s odvěsnami p a q. $\Rightarrow$ obsah trojúhelníku vypočteme podle vzorce $S=\frac{ab}{2}=\frac{pq}{2}=13,5$.

2. Přímku p můžeme zapsat v úsekovém tvaru: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$. Na přímce leží bod A $\Rightarrow$ dosadíme jej do rovnice: $\frac{3}{p}+\frac{2}{q}=1$.

Řešíme soustavu:
$$\frac{pq}{2}=13,5 \quad /\cdot 2$$
$$\frac{3}{p}+\frac{2}{q}=1 \qquad /\cdot pq$$

$$pq=27 \quad \Rightarrow \quad q=\frac{27}{p}$$
$$3q+2p=pq$$

Dosadíme za q a získáme rovnici: $3\frac{27}{p}+2p=p\frac{27}{p}$

$$\frac{81}{p}+2p=27 \quad /\cdot p$$
$$2p^2-27p+81=0$$

$$p_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-27)\pm\sqrt{(27)^2-4\cdot 2\cdot 81}}{2\cdot 2}=\frac{27\pm 9}{4}$$

$p_1=\frac{27+9}{4}=9$ $\qquad$ $p_2=\frac{27-9}{4}=4,5$

Příklad má dvě řešení:

$p_1=9 \Rightarrow q_1=\frac{27}{p_1}=\frac{27}{9}=3$

Rovnice přímky v úsekovém tvaru: $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1$

Obecná rovnice přímky: $x+3y-9=0$

$p_2=4,5 \Rightarrow q_2=\frac{27}{p_2}=\frac{27}{4,5}=6$

Rovnice přímky v úsekovém tvaru:

$\frac{x}{4,5}+\frac{y}{6}=1$

Obecná rovnice přímky: $4x+3y-18=0$

Př. 8: Petáková:
strana 106/cvičení 18
strana 106/cvičení 21 a) c)

Shrnutí: Úsekový tvar rovnice přímky umožňuje ihned určit průsečíky se souřadnými osami.