

### 7.3.10 Úsekový tvar rovnice přímky

**Předpoklady:** 7306

**Př. 1:** Jakou podmínku splňují body ležící na ose  $x$ ? Pomocí dvou bodů na ose  $x$  sestav parametrickou a obecnou rovnici této přímky.

Body na ose  $x$  například:  $[2;0]$ ,  $[15;0]$ ,  $[-3;0] \Rightarrow$  společná vlastnost:  $y$ -ová souřadnice je nulová (jde o body  $[x;0]$ )

**Parametrické vyjádření:** body  $[1;0]$ ,  $[2;0] \Rightarrow \mathbf{u} = (1;0)$ , bod  $[0,0]$

$x = 0 + t$   
 $y = 0, t \in R$  (jasné,  $x$ -ová souřadnice bodů na ose  $x$  může být cokoliv,  $y$ -ová je nulová)

**Obecná rovnice:**  $\mathbf{u} = (1;0) \Rightarrow \mathbf{n} = (0;1) \Rightarrow$  rovnice  $0x + y + c = 0$

Dosadíme bod  $[0;0]$ :  $0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Rovnice osy  $x$ :  $y = 0$  (jasné jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice)

**Př. 2:** Jakou podmínku splňují body ležící na ose  $y$ ? Pomocí dvou bodů na ose  $x$  sestav parametrickou a obecnou rovnici této přímky.

Body na ose  $y$  například:  $[0;1]$ ,  $[0;1532]$ ,  $[0;-562] \Rightarrow$  společná vlastnost:  $x$ -ová souřadnice je nulová (jde o body  $[0;y]$ )

**Parametrické vyjádření:** Body  $[0;1]$ ,  $[0;2] \Rightarrow \mathbf{u} = (0;1)$ , bod  $[0,0]$

$x = 0$   
 $y = 0 + t, t \in R$  (jasné,  $y$ -ová souřadnice bodů na ose  $y$  může být cokoliv,  $x$ -ová je nulová)

**Obecná rovnice:**  $\mathbf{u} = (0;1) \Rightarrow \mathbf{n} = (1;0) \Rightarrow$  rovnice  $x + 0y + c = 0$

Dosadíme bod  $[0;0]$ :  $0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Rovnice osy  $y$ :  $x = 0$  (jasné jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice)

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklady nejsou zbytečné. Studenti sice již vyjadřovali (úplně na začátku) osy pomocí rovnic, ale jednak uplynulo hodně času a jednak se studenti naučili obecné postupy na sestavování rovnic přímky, které jim v předchozích případech (příliš mnoho nul) působí značné problémy.

**Př. 3:** Je dána přímka  $p: 3x + 4y - 12 = 0$ . Urči průsečíky přímky  $p$  s osami  $x$  a  $y$ .

**Průsečík s osou  $x$**   $\Rightarrow$  nulová  $y$ -ová souřadnice  $\Rightarrow A[a_x;0]$ .

Dosadíme bod  $A[a_x;0]$  do rovnice přímky  $p$ :  $3a_x + 4 \cdot 0 - 12 = 0$

$$3a_x = 12$$

$a_x = 4 \Rightarrow$  přímka  $p$  se protíná s osou  $x$  v bodě  $A[4;0]$ .

**Průsečík s osou  $y$**   $\Rightarrow$  nulová  $x$ -ová souřadnice  $\Rightarrow B[0;b_y]$ .

Dosadíme bod  $B[0; b_y]$  do rovnice přímky  $p$ :  $3 \cdot 0 + 4 \cdot b_y - 12 = 0$

$$4b_y = 12$$

$b_y = 3 \Rightarrow$  přímka  $p$  se protíná s osou  $y$  v bodě  $B[0; 3]$ .

Zkusíme si upravit rovnici přímky:

$$3x + 4y - 12 = 0$$

$$3x + 4y = 12 \quad / : 12$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \quad \text{zajímavé: neznámé } x \text{ a } y \text{ jsou ve zlomcích, jejichž jmenovatele jsou}$$

souřadnicemi průsečíků se souřadnými osami – získali jsme **úsekový tvar rovnice přímky**

**Př. 4:** Dosazením ověř, zda platí, že přímka napsaná ve tvaru  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ , kde  $p \neq 0$  a  $q \neq 0$  se protíná se souřadnými osami v bodech  $P[p; 0]$  a  $Q[0; q]$ .

Dosadíme  $P[p; 0]$ :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$\frac{p}{p} + \frac{0}{q} = 1$$

$$1 = 1$$

Dosadíme  $Q[0; q]$ :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$\frac{0}{p} + \frac{q}{q} = 1$$

$$1 = 1$$

Jsou dány body  $P[p; 0]$  a  $Q[0; q]$ , kde  $p \neq 0$  a  $q \neq 0$  (tedy body  $P$  a  $Q$  jsou body na souřadnicových osách různé od počátku). Přímka  $PQ$  má rovnici  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ .

Je-li přímka napsaná ve tvaru  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ , kde  $p \neq 0$  a  $q \neq 0$ , protíná se souřadnými osami v bodech  $P[p; 0]$  a  $Q[0; q]$ .

Rovnice  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$  se nazývá úsekový tvar přímky.

**Př. 5:** Rozhodni, které přímky není možné zapsat v úsekovém tvaru.

Jde o přímky, které nemají dva různé průsečíky se souřadnými osami:

- přímky rovnoběžné se souřadnými osami
- přímky procházející počátkem

**Př. 6:** Jsou dány body  $A[-1; 0]$  a  $B[0; 4]$ . Zapiš rovnici přímky  $AB$  v úsekovém tvaru a ve tvaru obecné rovnice přímky.

Známe průsečíky se souřadnými osami  $\Rightarrow$  můžeme sestavit úsekový tvar rovnice přímky.

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1$$

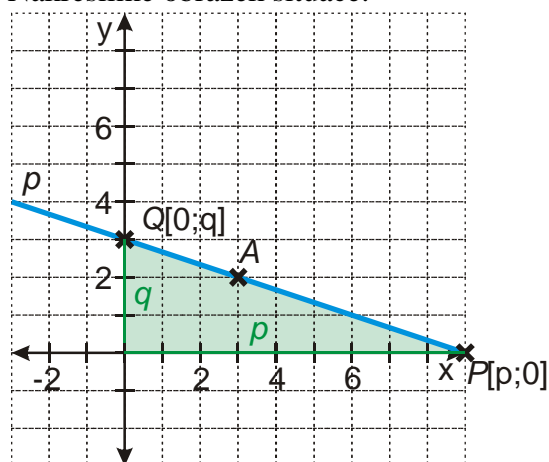
Obecnou rovnici získáme vynásobením:  $\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1 \quad / \cdot (-4)$

$$4x - y = -4$$

$$4x - y + 4 = 0$$

**Př. 7:** Je dán bod  $A[3;2]$ . Urči přímku  $p$  tak, aby procházela bodem  $A$  s spolu s osami určovala trojúhelník o obsahu 13,5.

Nakreslíme obrázek situace:



Body, ve kterých se přímka protíná s osami označíme  $P[p;0]$  a  $Q[0;q]$ . Pokud určíme jejich souřadnice (čísla  $p$  a  $q$ ) určíme i rovnici přímky  $\Rightarrow$  potřebuji dvě rovnice.

1. Vzniklý trojúhelník je pravoúhlý s odvěsnami  $p$  a  $q$ .  $\Rightarrow$  obsah trojúhelníku vypočteme podle vzorce  $S = \frac{ab}{2} = \frac{pq}{2} = 13,5$ .

2. Přímku  $p$  můžeme zapsat v úsekovém tvaru:  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ . Na přímce leží bod  $A \Rightarrow$  dosadíme

jej do rovnice:  $\frac{3}{p} + \frac{2}{q} = 1$ .

$$\frac{pq}{2} = 13,5 \quad / \cdot 2$$

Řešíme soustavu:

$$\frac{3}{p} + \frac{2}{q} = 1 \quad / \cdot pq$$

$$pq = 27 \Rightarrow q = \frac{27}{p}$$

$$3q + 2p = pq$$

Dosadíme za  $q$  a získáme rovnici:  $3 \frac{27}{p} + 2p = p \frac{27}{p}$

$$\frac{81}{p} + 2p = 27 \quad / \cdot p$$

$$2p^2 - 27p + 81 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(27)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 81}}{2 \cdot 2} = \frac{27 \pm 9}{4}$$

$$p_1 = \frac{27+9}{4} = 9 \qquad p_2 = \frac{27-9}{4} = 4,5$$

Příklad má dvě řešení:

$$p_1 = 9 \Rightarrow q_1 = \frac{27}{p_1} = \frac{27}{9} = 3$$

$$p_2 = 4,5 \Rightarrow q_2 = \frac{27}{p_2} = \frac{27}{4,5} = 6$$

Rovnice přímky v úsekovém tvaru:  $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$

Rovnice přímky v úsekovém tvaru:

$$\frac{x}{4,5} + \frac{y}{6} = 1$$

Obecná rovnice přímky:  $x + 3y - 9 = 0$

Obecná rovnice přímky:  $4x + 3y - 18 = 0$

**Př. 8:** Petáková:  
strana 106/cvičení 18  
strana 106/cvičení 21 a) c)

**Shrnutí:** Úsekový tvar rovnice přímky umožňuje ihned určit průsečíky se souřadnými osami.