7.3.9 Směrnicový tvar rovnice přímky

Předpoklady: 7306

Pedagogická poznámka: Stává se, že v hodině nestihneme poslední část s určováním vztahu mezi směrnicemi kolmých přímek.

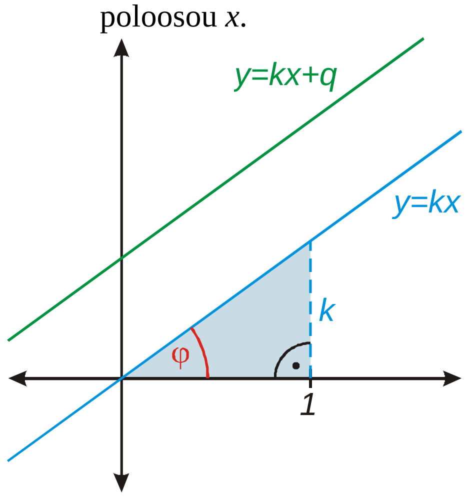
Vrátíme se k obecné rovnici přímky:
Obecná rovnice ve tvaru $ax+by+c=0$ není jednoznačná. Obsahuje tři parametry, rovnice, které jsou navzájem svými násobky, popisují stejné přímky.
Jak popsat přímku jednoznačně?
Nápad: zápis lineární funkce $y=kx+q$ je jednoznačný, různé předpisy znamenají různé přímky.

Můžeme na tento tvar převést každou obecnou rovnici přímky?
$ax+by+c=0$
$by=-ax-c \quad /:b$ vydělit můžeme jen, když platí $b\neq 0$
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ - tohle jsme chtěli

Pro které přímky, tento tvar nezískáme?
když $b=0 \Rightarrow$ tedy přímky $ax+0y+c=0$
$ax=c$ - přímky rovnoběžné s osou *y*. O těch jsme u lineárních funkcí nemluvili, nejde o grafy funkcí.

Rovnici každé přímky, která není rovnoběžná s osou *y* můžeme napsat ve tvaru $y=kx+q$. Tato rovnice se nazývá směrnicový tvar rovnice přímky. Číslo *k* se nazývá směrnice přímky.

Význam koeficientů:
- *q*: posunutí po ose *y*
- *k*: udává směr přímky, jde o $\operatorname{tg}\varphi$, kde φ je úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou *x*.



Z pravoúhlého trojúhelníku je vidět, že platí: $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k}{1} = k$

Př. 1: Je dána přímka $6x+3y-4=0$. Najdi směrnicový tvar rovnice této přímky, urči odchylku této přímky od kladné poloosy *x*.

$6x+3y-4=0$
$3y=-6x+4$
$y=-2x+\frac{4}{3}$
směrnice přímky $k=-2$
$\mathrm{tg}\,\varphi=-2 \Rightarrow \varphi=116°34'$

Př. 2: Napiš obecnou rovnici a směrnicový tvar rovnice přímky se směrnicí $k=2$, která prochází bodem $A[1;-1]$.

Dosadíme do směrnicového tvaru $y=kx+q$:
$y=2x+q$ teď dosadíme bod $A[1;-1]$
$-1=2\cdot 1+q$
$q=-3$
Směrnicový tvar: $y=2x-3$
Obecná rovnice: $2x-y-3=0$

Př. 3: Napiš ve směrnicovém tvaru rovnici přímky se směrnicí *k*, která prochází bodem $A[a_1;a_2]$.

Směrnicový tvar: $y=kx+q$.
Dosadíme bod $A[a_1;a_2]$ do rovnice a dopočítáme *q*: $a_2=ka_1+q$
$q=a_2-ka_1$
Dosadíme do rovnice: $y=kx+q=kx+a_2-ka_1$

Častěji píšeme rovnici ve tvaru: $y-a_2=k(x-a_1)$ $\Rightarrow$ největší výhoda směrnicového tvaru - snadno dokážeme zapsat přímku, která prochází bodem $A[a_1;a_2]$.

Přímku, která má směrnici *k* a prochází bodem $A[a_1;a_2]$ zapíšeme rovnicí $(y-a_2)=k(x-a_1)$.

Jak to funguje?

Př. 4: Ověř dosazením, že bod $A[a_1;a_2]$ vyhovuje rovnici $(y-a_2)=k(x-a_1)$ bez ohledu na směrnici *k*.

$(y-a_2)=k(x-a_1)$ dosadíme bod $A[a_1;a_2]$

$(a_2 - a_2) = k(a_1 - a_1)$
$0 = k \cdot 0$ vyjde bez ohledu na k

Pedagogická poznámka: Příklady 3 a 4 opět ověřují správné chápání rovnic v analytické geometrii (rozdíl mezi koeficienty *a*, *b*, *c* (které se u konkrétních přímek liší a které určují o kterou přímku jde) a neznámými *x*, *y* (které slouží jako „připravená místa“ pro dosazení souřadnic bodů, jejichž vztah k přímce chceme zjišťovat).

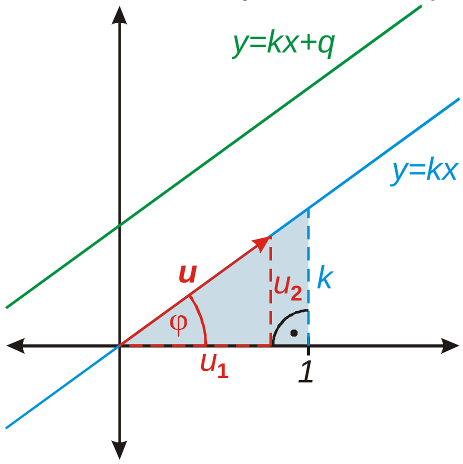
Jak zapsat všechny přímky procházející daným bodem?

- mají různý směr $\Rightarrow$ použijeme $k \in R$
- prochází bodem $A[a_1; a_2] \Rightarrow$ použijeme tvar $(y - a_2) = k(x - a_1)$
- **POZOR!!!** Přímku rovnoběžnou s osou *y* nemůžeme napsat ve směrnicovém tvaru $\Rightarrow$ musíme ji napsat zvlášť: $x = a_1$

Př. 5: Zapiš všechny přímky, které procházejí bodem $[3;1]$.

Použijeme směrnicový tvar: $y - a_2 = k(x - a_1)$ $k \in R$
$y - 1 = k(x - 3)$, $k \in R$
ještě rovnoběžka s osou *y*: $x = 3$

Směrnice i směrový vektor udávají směr přímky $\Rightarrow$ musí spolu souviset. Jak?



Z obrázku je vidět, že platí $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{1} = k = \frac{u_2}{u_1}$

Př. 6: Pomocí směrnicového tvaru napiš rovnici přímky *AB*, která prochází body $A[1;3]$, $B[-1;4]$.

Nejdříve určíme směrnici pomocí směrového vektoru, pak dosadíme do tvaru pro přímku procházející bodem.

směrový vektor: $B - A = (-2;1) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (-2;1)$ $\Rightarrow$ $k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Přímka procházející bodem: $(y - a_2) = k(x - a_1)$

Dosadíme bod $A[1;3]$ a směrnici $k=-\frac{1}{2}$: $y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+3$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

Dodatek: Získaná rovnice samozřejmě nezávisí na tom, který bod použijeme pro dosazení:

Dosadíme bod $B[-1;4]$: $y-4=-\frac{1}{2}(x-(-1))$

$y-4=-\frac{1}{2}(x+1)$ $\qquad y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+4$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ stejný výsledek.

Jaký je vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek?
Napíšeme si dvě kolmice ve směrnicovém tvaru:

$p: y=kx+q$ $\qquad q: y=k'x+q'$

Přepíšeme do obecného tvaru:

$p: kx-y+q=0$ $\qquad q: k'x-y+q'$

Kolmost můžeme určit z normálových vektorů:

$\boldsymbol{n}_p=(k;-1)$ $\qquad \boldsymbol{n}_q=(k';-1)$

Dva vektory jsou kolmé, když je jejich skalární součin roven nule.

$\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{n}_q=(k;-1)(k';-1)=k\cdot k'+(-1)(-1)=0$

$k\cdot k'+1=0$

$k\cdot k'=-1$

$k'=-\frac{1}{k}$

Př. 7: Najdi směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem $A[1;2]$ a je kolmá na přímku $y=2x+1$.

Směrnice původní přímky: $k=2$ $\Rightarrow$ směrnice kolmice: $k'=-\frac{1}{k}=-\frac{1}{2}$

Do rovnice $y=-\frac{1}{2}x+q$ dosadíme bod $A[1;2]$: $1=-\frac{1}{2}\cdot 2+q$ $\Rightarrow$ $q=2$

Hledaná přímka má rovnici: $y=-\frac{1}{2}x+2$

Př. 8: Petáková:
strana 105/cvičení 3

Shrnutí: Směrnicový tvar (předpis lineární funkce) umožňuje snadno zapsat přímku procházející bodem.