7.3.8 Nerovnice pro polorovinu

Předpoklady: 7306

Př. 1: Urči průsečík přímek p a q. Na základě výsledku rozhodni o jejich vzájemné poloze.
$p: \begin{matrix} x = 2+5t \\ y = 5+4t, t \in R \end{matrix}$, $q: 4x-5y+15=0$.

Průsečík leží na obou přímkách $\Rightarrow$ musí vyhovovat oběma vyjádřením $\Rightarrow$ řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$x = 2+5t$

$y = 5+4t$ $\Rightarrow$ z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí rovnice

$\underline{4x-5y+15=0}$

$4(2+5t)-5(5+4t)+15=0$

$8+20t-25-20t+15=0$

$-2=0$

soustava nemá řešení $\Rightarrow$ přímky nemají společný bod $\Rightarrow$ přímky p, q jsou rovnoběžné

Př. 2: Rozhodni, zda se přímka $r: x-2y-1=0$ protíná s úsečkou PQ, $P[-3;3]$, $Q[0;2]$. Příklad řeš v levé polovině stránky.

Úsečku umíme vyjádřit pouze parametricky:
směrový vektor: $\boldsymbol{u}_{PQ} = Q-P = (3;-1)$, počáteční bod $P[-3;3]$ $\Rightarrow$

úsečka PQ: $\begin{matrix} x = -3+3t \\ y = 3-t, t \in \langle 0;1 \rangle \end{matrix}$, $t \in \langle 0;1 \rangle$ - jde pouze o úsečku s počátečním bodem P

Hledání průniku je stejné jako u předchozího příkladu. Musíme dát pozor zda hodnota parametru, který případně získáme, leží v intervalu $\langle 0;1 \rangle$.

$x = -3+3t$

$y = 3-t$

$\underline{x-2y-1=0}$

$-3+3t-2(3-t)-1=0$

$-3+3t-6+2t-1=0$

$5t=10$

$t=2$ $\Rightarrow$ průsečík přímky p s přímkou PQ leží na polopřímce PQ za bodem Q $\Rightarrow$
Přímka r se s úsečkou PQ neprotíná.

Pedagogická poznámka: Opět narazíte na problém s vyjádřením přímky. Nemá cenu situaci příliš zdržovat.

Nyní zkusíme vyřešit předchozí příklad obecně.

Př. 3: Je dána přímka $r: ax+by+c=0$ a body $P[p_1;p_2]$, $Q[q_1;q_2]$. Napiš parametrické vyjádření přímky *PQ* a urči průsečík přímky *r* s úsečkou *PQ*. Příklad řeš v pravé polovině stránky analogicky předchozímu příkladu s konkrétním zadáním.

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu. nyní s písmenky místo číslic:
směrový vektor: $\boldsymbol{u}_{PQ} = Q-P = (q_1-p_1;q_2-p_2)$, počáteční bod $P[p_1;p_2] \Rightarrow$

PQ: $\begin{matrix} x = p_1 + t(q_1-p_1) \\ y = p_2 + t(q_2-p_2) \end{matrix}$, $t \in \langle 0;1 \rangle$ - jde pouze o úsečku s počátečním bodem *P*

Řešíme soustavu rovnic:

$x = p_1 + t(q_1-p_1)$

$y = p_2 + t(q_2-p_2)$

$ax+by+c=0$

Z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí:

$a[p_1+t(q_1-p_1)]+b[p_2+t(q_2-p_2)]+c=0$

Roznásobíme hranaté závorky: $ap_1+at(q_1-p_1)+bp_2+bt(q_2-p_2)+c=0$

Rovnost $ap_1+at(q_1-p_1)+bp_2+bt(q_2-p_2)+c=0$ vypadá hrůzostrašně, přesto je v podstatě jednoduchá. Pro konkrétní zadání ve výrazu vlevo zbude pouze jediná neznámá *t*

$\Rightarrow$ výraz $ap_1+at(q_1-p_1)+bp_2+bt(q_2-p_2)+c$:

- znamená hodnotu (číslo), kterou získáme dosazením bodu na přímce *PQ* do rovnice přímky *r* (jakmile zvolíme *t*, máme konkrétní bod)
- jde o předpis lineární funkce proměnné *t*: $f(t): Y = At+B$, kde platí:

  $At+B = [a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)]t + ap_1+bp_2+c = 0$

Jaká je **hodnota funkce** $f(t): Y = At+B$ **v bodě *P***?

Pro bod *P* platí: $t=0$. Dosadíme do výrazu $t=0$:

$ap_1+a\cdot 0(q_1-p_1)+bp_2+b\cdot 0(q_2-p_2)+c = ap_1+bp_2+c$.

Platí tedy: $f(P)=f(0)=ap_1+bp_2+c$ = dosazení bodu *P* do rovnice přímky *r*

Jaká je **hodnota funkce** $f(t): Y = At+B$ **v bodě *Q***?

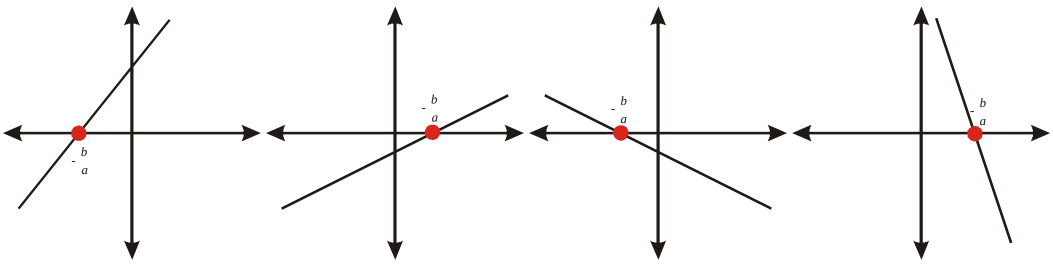
Pro bod *Q* platí: $t=1$. Dosadím do levé strany rovnice:

$ap_1+a\cdot 1(q_1-p_1)+bp_2+b\cdot 1(q_2-p_2)+c =$

$= ap_1+aq_1ap_1+bp_2+bq_2-bp_2+c = aq_1+bq_2+c=0$.

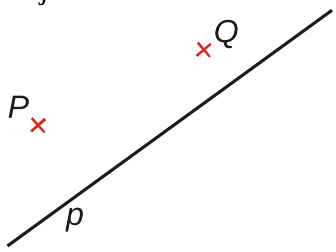
Platí tedy: $f(Q)=f(1)=aq_1+bq_2+c$ = dosazení bodu *Q* do rovnice přímky *r*

Pokud se úsečka *PQ* s přímkou *p* protne, musí pro nějakou hodnotu parametru $t \in \langle 0;1 \rangle$ platit rovnice $ap_1+at(q_1-p_1)+bp_2+bt(q_2-p_2)+c=0 \Rightarrow$ funkce $f(t): Y = At+B$ musí dosáhnout nulové hodnoty.



Z grafu lineární funkce je vidět, že nekonstantní lineární funkce dosahuje nulové hodnoty pouze v bodě, kde funkce mění znaménka $\Rightarrow$ úsečka PQ se protne s přímkou r právě když, mají čísla $f\left(P\right)=f\left(0\right)=ap_1+bp_2+c$ a $f\left(Q\right)=f\left(1\right)=aq_1+bq_2+c$ opačná znaménka

$\Rightarrow$ dokážeme poznat, zda dva body leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou p: pokud leží ve stejné polorovině, úsečka, kterou tvoří se neprotíná s přímkou p a funkční hodnoty mají stejné znaménko $\Rightarrow$ obecná rovnice přímky nám něco říká i o bodech, které na ní neleží



Jestliže přímka p má obecnou rovnici $ax+by+c=0$, pak jedna polorovina s hraniční přímkou p je množina bodů $X\left[x;y\right]$, pro které platí $ax+by+c\geq 0$ a druhá polorovina je množina bodů $X\left[x;y\right]$, pro které platí $ax+by+c\leq 0$.

Dodatek: Znaménko výrazu $ax+by+c$ neříká nic o tom, zda bod leží nad nebo pod přímkou. Jediné, co z něj zatím můžeme získat, je jeho srovnání se znaménkem jiného bodu.

Pedagogická poznámka: Ne všichni studenti budou schopni o hodině pochopit odvození nerovnice poloroviny. Myslím, že je zbytečné se kvůli tomu dlouho zastavovat, určitě se spokojí s obsahem rámečku. Vyřešení následujícího příkladu je pro ně důležitější.

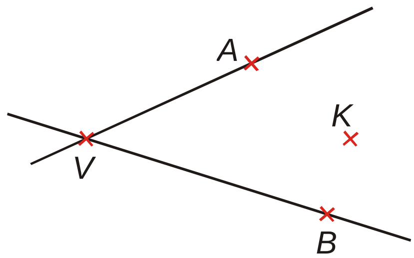
Př. 4: Rozhodni, zda body $P\left[-3;3\right]$, $Q\left[0;2\right]$ leží v jedné polorovině ohraničené přímkou $r: x-2y-1=0$.

Postupujeme podle předchozích úvah:

- dosazení bodu $P\left[-3;3\right]$ do rovnice přímky r: $x-2y-1=-3-2\cdot 3-1=-10$
- dosazení bodu $Q\left[0;2\right]$ do rovnice přímky r: $x-2y-1=0-2\cdot 2-1=-5$

v obou případech jsme získali hodnoty se stejným znaménkem $\Rightarrow$ body P, Q leží vzhledem k přímce r v jedné polorovině (už víme z příkladu 2, kde jsme zjistili, že úsečka PQ nemá s přímkou r žádný průsečík).

Př. 5: Jsou dány body $A[1;2]$, $B[-1;-1]$, $V[-3;1]$ a $K[5;-6]$. Rozhodni výpočtem, zda bod *K* leží uvnitř konvexního úhlu *AVB*.



Z obrázku je vidět, že pokud má bod *K* ležet uvnitř konvexního úhlu *AVB* musí:

- vzhledem k hraniční přímce *VB* ležet ve stejné polorovině jako bod *A*
- vzhledem k hraniční přímce *VA* ležet ve stejné polorovině jako bod *B*

hraniční přímka *VB*

směrový vektor: $B-V=(2;-2)\Rightarrow \boldsymbol{u}_{VB}=(1;-1)$

normálový vektor: $\boldsymbol{n}_{VB}=(1;1)$ $\Rightarrow$ rovnice: $x+y+c=0$

dosadíme bod *B*: $(-1)+(-1)+c=0\Rightarrow c=2$

obecná rovnice přímky *VB*: $x+y+2=0$

dosadíme bod *A*: $x+y+2=1+2+2=5$

dosadíme bod *K*: $x+y+2=5+(-6)+2=1$

$\Rightarrow$ stejná znaménka $\Rightarrow$ body *A* a *K* leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *VB*

hraniční přímka *VA*

směrový vektor: $A-V=(4;1)\Rightarrow \boldsymbol{u}_{VA}=(4;1)$

normálový vektor: $\boldsymbol{n}_{VB}=(1;-4)$ $\Rightarrow$ rovnice: $x-4y+c=0$

dosadíme bod *A*: $1-4\cdot 2+c=0\Rightarrow c=7$

obecná rovnice přímky *VA*: $x-4y+7=0$

dosadíme bod *B*: $x-4y+7=(-1)-4(-1)+7=10$

dosadíme bod *K*: $x-4y+7=5-4(-6)+7=26$

$\Rightarrow$ stejná znaménka $\Rightarrow$ body *B* a *K* leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *VA*

$\Rightarrow$ bod *K* leží uvnitř konvexního úhlu *AVB*.

Př. 6: Petáková:
strana 106/cvičení 24 a)
strana 106/cvičení 26
strana 106/cvičení 28

Shrnutí: Obecná rovnice přímky nese informaci i o bodech, které na ní neleží. Dosazením můžeme ze znamének rozhodnout zda body leží ve stejné polorovině.