

### 7.3.8 Nerovnice pro polorovinu

#### Předpoklady: 7306

**Př. 1:** Urči průsečík přímek  $p$  a  $q$ . Na základě výsledku rozhodni o jejich vzájemné poloze.

$$p: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 5 + 4t, t \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad q: 4x - 5y + 15 = 0.$$

Průsečík leží na obou přímkách  $\Rightarrow$  musí vyhovovat oběma vyjádřením  $\Rightarrow$  řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$x = 2 + 5t$$

$$y = 5 + 4t \quad \Rightarrow \text{z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí rovnice}$$

$$4x - 5y + 15 = 0$$

$$4(2 + 5t) - 5(5 + 4t) + 15 = 0$$

$$8 + 20t - 25 - 20t + 15 = 0$$

$$-2 = 0$$

soustava nemá řešení  $\Rightarrow$  přímky nemají společný bod  $\Rightarrow$  přímky  $p, q$  jsou rovnoběžné

**Př. 2:** Rozhodni, zda se přímka  $r: x - 2y - 1 = 0$  protíná s úsečkou  $PQ$ ,  $P[-3;3]$ ,  $Q[0;2]$ .

Příklad řeš v levé polovině stránky.

Úsečku umíme vyjádřit pouze parametricky:

směrový vektor:  $\mathbf{u}_{PQ} = Q - P = (3; -1)$ , počáteční bod  $P[-3;3] \Rightarrow$

úsečka  $PQ$ :  $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 3 - t, t \in \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$ ,  $t \in \langle 0; 1 \rangle$  - jde pouze o úsečku s počátečním bodem  $P$

Hledání průniku je stejné jako u předchozího příkladu. Musíme dát pozor zda hodnota parametru, který případně získáme, leží v intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ .

$$x = -3 + 3t$$

$$y = 3 - t$$

$$x - 2y - 1 = 0$$

$$-3 + 3t - 2(3 - t) - 1 = 0$$

$$-3 + 3t - 6 + 2t - 1 = 0$$

$$5t = 10$$

$t = 2 \Rightarrow$  průsečík přímky  $p$  s přímkou  $PQ$  leží na polopřímce  $PQ$  za bodem  $Q \Rightarrow$

Přímka  $r$  se s úsečkou  $PQ$  neprotíná.

**Pedagogická poznámka:** Opět narazíte na problém s vyjádřením přímky. Nemá cenu situaci příliš zdržovat.

Nyní zkusíme vyřešit předchozí příklad obecně.

**Př. 3:** Je dána přímka  $r: ax + by + c = 0$  a body  $P[p_1; p_2]$ ,  $Q[q_1; q_2]$ . Napiš parametrické vyjádření přímky  $PQ$  a urči průsečík přímky  $r$  s úsečkou  $PQ$ . Příklad řeš v pravé polovině stránky analogicky předchozímu příkladu s konkrétním zadáním.

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu. nyní s písmenky místo číslic: směrový vektor:  $\mathbf{u}_{PQ} = Q - P = (q_1 - p_1; q_2 - p_2)$ , počáteční bod  $P[p_1; p_2] \Rightarrow$

$$PQ: \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) \end{cases}, t \in \langle 0; 1 \rangle - \text{jde pouze o úsečku s počátečním bodem } P$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$x = p_1 + t(q_1 - p_1)$$

$$y = p_2 + t(q_2 - p_2)$$

$$ax + by + c = 0$$

Z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí:

$$a[p_1 + t(q_1 - p_1)] + b[p_2 + t(q_2 - p_2)] + c = 0$$

$$\text{Roznásobíme hranaté závorky: } ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c = 0$$

Rovnost  $ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c = 0$  vypadá hrůzostrašně, přesto je v podstatě jednoduchá. Pro konkrétní zadání ve výrazu vlevo zůstane pouze jediná neznámá  $t$

$$\Rightarrow \text{výraz } ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c :$$

- znamená hodnotu (číslo), kterou získáme dosazením bodu na přímce  $PQ$  do rovnice přímky  $r$  (jakmile zvolíme  $t$ , máme konkrétní bod)
- jde o předpis lineární funkce proměnné  $t$ :  $f(t): Y = At + B$ , kde platí:

$$At + B = [a(q_1 - p_1) + b(q_2 - p_2)]t + ap_1 + bp_2 + c = 0$$

Jaká je **hodnota funkce**  $f(t): Y = At + B$  **v bodě**  $P$ ?

Pro bod  $P$  platí:  $t = 0$ . Dosadíme do výrazu  $t = 0$ :

$$ap_1 + a \cdot 0(q_1 - p_1) + bp_2 + b \cdot 0(q_2 - p_2) + c = ap_1 + bp_2 + c.$$

Platí tedy:  $f(P) = f(0) = ap_1 + bp_2 + c =$  dosazení bodu  $P$  do rovnice přímky  $r$

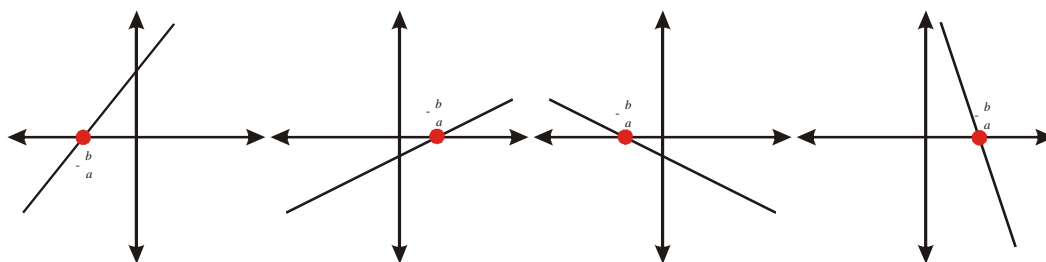
Jaká je **hodnota funkce**  $f(t): Y = At + B$  **v bodě**  $Q$ ?

Pro bod  $Q$  platí:  $t = 1$ . Dosadím do levé strany rovnice:

$$\begin{aligned} ap_1 + a \cdot 1(q_1 - p_1) + bp_2 + b \cdot 1(q_2 - p_2) + c &= \\ = ap_1 + aq_1 - ap_1 + bp_2 + bq_2 - bp_2 + c &= aq_1 + bq_2 + c = 0 \end{aligned}$$

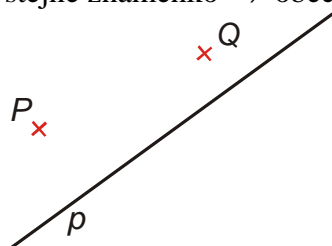
Platí tedy:  $f(Q) = f(1) = aq_1 + bq_2 + c =$  dosazení bodu  $Q$  do rovnice přímky  $r$

Pokud se úsečka  $PQ$  s přímkou  $p$  protne, musí pro nějakou hodnotu parametru  $t \in \langle 0; 1 \rangle$  platit rovnice  $ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c = 0 \Rightarrow$  funkce  $f(t): Y = At + B$  musí dosáhnout nulové hodnoty.



Z grafu lineární funkce je vidět, že nekonzstantní lineární funkce dosahuje nulové hodnoty pouze v bodě, kde funkce mění znaménka  $\Rightarrow$  úsečka  $PQ$  se protne s přímkou  $r$  právě když, mají čísla  $f(P) = f(0) = ap_1 + bp_2 + c$  a  $f(Q) = f(1) = aq_1 + bq_2 + c$  opačná znaménka

$\Rightarrow$  dokážeme poznat, zda dva body leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $p$ : pokud leží ve stejné polorovině, úsečka, kterou tvoří se neprotíná s přímkou  $p$  a funkční hodnoty mají stejné znaménko  $\Rightarrow$  obecná rovnice přímky nám něco říká i o bodech, které na ní neleží



Jestliže přímka  $p$  má obecnou rovnici  $ax + by + c = 0$ , pak jedna polorovina s hraniční přímkou  $p$  je množina bodů  $X[x; y]$ , pro které platí  $ax + by + c \geq 0$  a druhá polorovina je množina bodů  $X[x; y]$ , pro které platí  $ax + by + c \leq 0$ .

**Dodatek:** Znaménko výrazu  $ax + by + c$  neříká nic o tom, zda bod leží nad nebo pod přímkou. Jediné, co z něj zatím můžeme získat, je jeho srovnání se znaménkem jiného bodu.

**Pedagogická poznámka:** Ne všichni studenti budou schopni o hodině pochopit odvození nerovnice poloroviny. Myslím, že je zbytečné se kvůli tomu dlouho zastavovat, určitě se spokojí s obsahem rámečku. Vyřešení následujícího příkladu je pro ně důležitější.

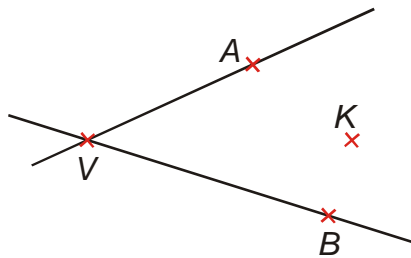
**Př. 4:** Rozhodni, zda body  $P[-3; 3]$ ,  $Q[0; 2]$  leží v jedné polorovině ohraničené přímkou  $r: x - 2y - 1 = 0$ .

Postupujeme podle předchozích úvah:

- dosazení bodu  $P[-3; 3]$  do rovnice přímky  $r$ :  $x - 2y - 1 = -3 - 2 \cdot 3 - 1 = -10$
- dosazení bodu  $Q[0; 2]$  do rovnice přímky  $r$ :  $x - 2y - 1 = 0 - 2 \cdot 2 - 1 = -5$

v obou případech jsme získali hodnoty se stejným znaménkem  $\Rightarrow$  body  $P, Q$  leží vzhledem k přímce  $r$  v jedné polorovině (už víme z příkladu 2, kde jsme zjistili, že úsečka  $PQ$  nemá s přímkou  $r$  žádný průsečík).

**Př. 5:** Jsou dány body  $A[1;2]$ ,  $B[-1;-1]$ ,  $V[-3;1]$  a  $K[5;-6]$ . Rozhodni výpočtem, zda bod  $K$  leží uvnitř konvexního úhlu  $AVB$ .



Z obrázku je vidět, že pokud má bod  $K$  ležet uvnitř konvexního úhlu  $AVB$  musí:

- vzhledem k hraniční přímce  $VB$  ležet ve stejné polorovině jako bod  $A$
- vzhledem k hraniční přímce  $VA$  ležet ve stejné polorovině jako bod  $B$

**hraniční přímka  $VB$**

směrový vektor:  $B - V = (2; -2) \Rightarrow \mathbf{u}_{VB} = (1; -1)$

normálový vektor:  $\mathbf{n}_{VB} = (1; 1) \Rightarrow$  rovnice:  $x + y + c = 0$

dosadíme bod  $B$ :  $(-1) + (-1) + c = 0 \Rightarrow c = 2$

obecná rovnice přímky  $VB$ :  $x + y + 2 = 0$

dosadíme bod  $A$ :  $x + y + 2 = 1 + 2 + 2 = 5$

dosadíme bod  $K$ :  $x + y + 2 = 5 + (-6) + 2 = 1$

$\Rightarrow$  stejná znaménka  $\Rightarrow$  body  $A$  a  $K$  leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $VB$

**hraniční přímka  $VA$**

směrový vektor:  $A - V = (4; 1) \Rightarrow \mathbf{u}_{VA} = (4; 1)$

normálový vektor:  $\mathbf{n}_{VA} = (1; -4) \Rightarrow$  rovnice:  $x - 4y + c = 0$

dosadíme bod  $A$ :  $1 - 4 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = 7$

obecná rovnice přímky  $VA$ :  $x - 4y + 7 = 0$

dosadíme bod  $B$ :  $x - 4y + 7 = (-1) - 4(-1) + 7 = 10$

dosadíme bod  $K$ :  $x - 4y + 7 = 5 - 4(-6) + 7 = 26$

$\Rightarrow$  stejná znaménka  $\Rightarrow$  body  $B$  a  $K$  leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $VA$

$\Rightarrow$  bod  $K$  leží uvnitř konvexního úhlu  $AVB$ .

**Př. 6:** Petáková:

strana 106/cvičení 24 a)

strana 106/cvičení 26

strana 106/cvičení 28

**Shrnutí:** Obecná rovnice přímky nese informaci i o bodech, které na ní neleží. Dosazením můžeme ze znamének rozhodnout zda body leží ve stejné polorovině.