7.3.6 Obecná rovnice přímky II

Předpoklady: 7305

Pedagogická poznámka: Hodina neobsahuje novou látku. Studenti si mají samostatným počítáním upevnit dosud probrané.

Pedagogická poznámka: Následující příklad není součástí předchozí hodiny úmyslně. Jde o to, aby se otestovali, co jsou schopni z minulé hodiny studenti rychle použít.

Př. 1: Urči, které z následujících rovnic určují stejnou přímku:
a) $2x-y+3=0$ b) $2x-3y+3=0$ c) $4x+6y+6=0$
d) $-x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$ e) $4x-6y+3=0$

Všechny rovnice vydělíme tak, aby před *x* byla jednička $\Rightarrow$

a) $2x-y+3=0 \Rightarrow x-\frac{y}{2}+\frac{3}{2}=0$

b) $2x-3y+3=0 \Rightarrow x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}=0$

c) $4x+6y+6=0 \Rightarrow x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}=0$

d) $-x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}=0$

e) $4x-6y+3=0 \Rightarrow x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}=0$

Stejnou přímku určují rovnice b) a d).

Př. 2: Rozhodni, jak můžeme u přímek zapsaných pomocí obecné rovnice rozhodnout o jejich rovnoběžnosti. Které z přímek uvedených v předchozím příkladu jsou rovnoběžné s přímkou $2x-3y+3=0$?

Přímky jsou rovnoběžné, když jejich normálové vektory mají stejný směr $\Rightarrow$ normálové vektory takových přímek jsou svými násobky.
Při hledání rovnoběžných přímek se zabýváme pouze koeficienty *a*, *b* $\Rightarrow$ s přímkou $2x-3y+3=0$ jsou z přímek zadaných v příkladu 4 rovnoběžné přímky $-x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$ (ta je s ní totožná) a $4x-6y+3=0$.

Př. 3: Najdi obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou $2x-3y+1=0$ a prochází bodem $K[-2;3]$.

Rovnoběžka s přímkou $2x-3y+1=0$ má stejný normálový vektor (nebo jeho násobek, ale to je komplikace) $\Rightarrow$ rovnice se bude lišit pouze v parametru *c*:
$2x-3y+c=0$

Dosadíme bod $K[-2;3]$: $2x-3y+c=2(-2)-3\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=13$

Přímka rovnoběžná s přímkou $2x-3y+1=0$ procházející bodem $K[-2;3]$ má rovnici $2x-3y+13=0$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad dobře dokumentuje problémy části studentů s matematikou. Všechny informace potřebné k jeho vyřešení studenti mají, přesto čekají až jim ho někdo ukáže, protože takový příklad ještě nedělali. I když to není příliš populární trvám na tom, že tímto způsobem se matematiku nemůže naučit nikdo.

Př. 4: Najdi obecnou rovnici přímky, která je kolmá na přímku $2x-3y+1=0$ a prochází bodem $K[-2;3]$.

Normálový vektor hledané kolmice je kolmý na vektor $(2;-3) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;2) \Rightarrow$

$3x+2y+c=0$

dosadíme bod $K[-2;3]$: $3(-2)+2\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=0$

Přímka kolmá na přímku $2x-3y+1=0$ procházející bodem $K[-2;3]$ má rovnici $3x+2y=0$.

Př. 5: Urči vzájemnou polohu přímek $p: 3x+2y+1=0$ a $q: x-3y+4=0$. Pokud jsou přímky různoběžné, urči jejich průsečík.

Stejně jako u parametrického vyjádření se nejdříve zajímáme o směr přímek (který udávají vektory, tentokrát normálové): $\boldsymbol{n}_p=(3;2)$ $\boldsymbol{n}_q=(1;-3)$

normálové vektory nemají stejný směr (jeden není násobek druhého) $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné

hledáme průsečík (bod, který vyhovuje oběma rovnicím) $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic:

$$3x+2y+1=0$$
$$x-3y+4=0$$

$$3x+2y+1=0$$
$$[\![1]\!]-3[\![2]\!] \qquad 11y-11=0$$

$y=1$

dopočítáme *x*: $x-3y+4=x-3\cdot 1+4=0$

$x=-1$

Přímky *p* a *q* se protínají v bodě $P[-1;1]$.

Př. 6: Najdi společné body přímek $p=\{[2-3t;1+2t], t\in R\}$ a $r: 2x+3y-7=0$. Podle počtu nalezených bodů rozhodni o jejich vzájemné poloze:

přímka *p*: $\begin{aligned} x&=2-3t \\ y&=1+2t, t\in R \end{aligned}$

přímka *r*: $2x+3y-7=0$

společné body obou přímek musí vyhovovat oběma vyjádření $\Rightarrow$ soustava tří rovnic o třech neznámých:

$x = 2 - 3t$

$y = 1 + 2t$ $\Rightarrow$ z první a druhé rovnice dosadíme do třetí rovnice

$2x + 3y - 7 = 0$

$2(2-3t) + 3(1+2t) - 7 = 0$

$4 - 6t + 3 + 6t - 7 = 0$

$0 = 0$ $\Rightarrow$ přímky mají nekonečně mnoho společných bodů (za t můžeme dosadit cokoliv) $\Rightarrow$ přímky p a r jsou rovnoběžné

Pedagogická poznámka: Následující příklad vyžaduje pouze orientaci ve směrových a normálových vektorech. Snažím se (i přeskočením některých předchozích příkladů), aby si ozkoušeli všichni. Studenti většinou pro přímku nepoužijí rovnou vektor $\boldsymbol{u}$, ale vektor na něj kolmý. Říkám jim nejdříve jenom to, aby si ujasnili, co který z jejich vektorů znamená, případně si nakreslili obrázek. Při vysvětlování před třídou ho na tabuli kreslím také.

Př. 7: Je dána přímka $p(A;\boldsymbol{u})$; $A[1;-2]$, $\boldsymbol{u} = (-1;2)$. Najdi obecnou rovnici přímky *r*, která je na přímku *p* kolmá a prochází bodem *A*.

Hledaná přímka je kolmá na přímku p $\Rightarrow$ normálový vektor přímky r se rovná směrovému vektoru přímky p: $\boldsymbol{n}_r = \boldsymbol{u}_p = (-1;2)$ $\Rightarrow$ $-x + 2y + c = 0$

Dosadíme bod $A[1;-2]$: $-1 + 2(-2) + c = 0$ $\Rightarrow$ $c = 5$

Přímka r má obecnou rovnici $-x + 2y + 5 = 0$

Př. 8: Najdi parametrické vyjádření přímky $p: 3x - 4y + 5 = 0$.

Pro parametrické vyjádření potřebujeme:

- směrový vektor: je kolmý na normálový $\boldsymbol{n}_p = (3;-4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{s}_p = (4;3)$
- jeden bod přímky: zvolíme si jednu souřadnici, druhou spočítáme (například $x = 1$ $\Rightarrow$ $3x - 4y + 5 = 3 \cdot 1 - 4y + 5 = 0$ $\Rightarrow$ $y = 2$ $\Rightarrow$ $A[1;2]$

Parametrické vyjádření přímky p: $x = 1 + 4t$, $y = 2 + 3t, t \in R$

Dodatek: Je možné postupovat i jinak:
vypočítat z obecné rovnice dva body a sestavit parametrické vyjádření s jejich pomocí
jednu proměnou vyjádřit pomocí parametru (1. rovnice $x = t$) a tímto vyjádřením ji nahradit v obecné rovnici (2. rovnice $3t - 4y + 5 = 0$ $\Rightarrow$ $y = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}t$)
Vyjádření, která získáme, budou obecně různá.

Př. 9: Petáková:
strana 105/cvičení 5

strana 105/cvičení 10
strana 106/cvičení 13 a)

Shrnutí: