

### 7.3.6 Obecná rovnice přímky II

**Předpoklady:** 7305

**Pedagogická poznámka:** Hodina neobsahuje novou látku. Studenti si mají samostatným počítáním upevnit dosud probrané.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad není součástí předchozí hodiny úmyslně. Jde o to, aby se otestovali, co jsou schopni z minulé hodiny studenti rychle použít.

**Př. 1:** Urči, které z následujících rovnic určují stejnou přímku:

a)  $2x - y + 3 = 0$

b)  $2x - 3y + 3 = 0$

c)  $4x + 6y + 6 = 0$

d)  $-x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$

e)  $4x - 6y + 3 = 0$

Všechny rovnice vydělíme tak, aby před  $x$  byla jednička  $\Rightarrow$

a)  $2x - y + 3 = 0 \Rightarrow x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} = 0$

b)  $2x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

c)  $4x + 6y + 6 = 0 \Rightarrow x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

d)  $-x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

e)  $4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{4} = 0$

Stejnou přímku určují rovnice b) a d).

**Př. 2:** Rozhodni, jak můžeme u přímek zapsaných pomocí obecné rovnice rozhodnout o jejich rovnoběžnosti. Které z přímek uvedených v předchozím příkladu jsou rovnoběžné s přímkou  $2x - 3y + 3 = 0$ ?

Přímky jsou rovnoběžné, když jejich normálové vektory mají stejný směr  $\Rightarrow$  normálové vektory takových přímek jsou svými násobky.

Při hledání rovnoběžných přímek se zabýváme pouze koeficienty  $a, b \Rightarrow$  s přímkou

$2x - 3y + 3 = 0$  jsou z přímek zadaných v příkladu 4 rovnoběžné přímky  $-x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$  (ta je s ní totožná) a  $4x - 6y + 3 = 0$ .

**Př. 3:** Najdi obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou  $2x - 3y + 1 = 0$  a prochází bodem  $K[-2; 3]$ .

Rovnoběžka s přímkou  $2x - 3y + 1 = 0$  má stejný normálový vektor (nebo jeho násobek, ale to je komplikace)  $\Rightarrow$  rovnice se bude lišit pouze v parametru  $c$ :

$2x - 3y + c = 0$

Dosadíme bod  $K[-2;3]$ :  $2x - 3y + c = 2(-2) - 3 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 13$

Přímka rovnoběžná s přímkou  $2x - 3y + 1 = 0$  procházející bodem  $K[-2;3]$  má rovnici  $2x - 3y + 13 = 0$ .

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad dobře dokumentuje problémy části studentů s matematikou. Všechny informace potřebné k jeho vyřešení studenti mají, přesto čekají až jim ho někdo ukáže, protože takový příklad ještě nedělali. I když to není příliš populární trvám na tom, že tímto způsobem se matematiku nemůže naučit nikdo.

**Př. 4:** Najdi obecnou rovnici přímky, která je kolmá na přímku  $2x - 3y + 1 = 0$  a prochází bodem  $K[-2;3]$ .

Normálový vektor hledané kolmice je kolmý na vektor  $(2; -3) \Rightarrow \mathbf{n} = (3; 2) \Rightarrow$

$$3x + 2y + c = 0$$

dosadíme bod  $K[-2;3]$ :  $3(-2) + 2 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Přímka kolmá na přímkou  $2x - 3y + 1 = 0$  procházející bodem  $K[-2;3]$  má rovnici

$$3x + 2y = 0.$$

**Př. 5:** Urči vzájemnou polohu přímek  $p: 3x + 2y + 1 = 0$  a  $q: x - 3y + 4 = 0$ . Pokud jsou přímky různoběžné, urči jejich průsečík.

Stejně jako u parametrického vyjádření se nejdříve zajímáme o směr přímek (který udávají vektory, tentokrát normálové):  $\mathbf{n}_p = (3; 2)$        $\mathbf{n}_q = (1; -3)$

normálové vektory nemají stejný směr (jeden není násobek druhého)  $\Rightarrow$  přímky jsou různoběžné

hledáme průsečík (bod, který vyhovuje oběma rovnicím)  $\Rightarrow$  řešíme soustavu rovnic:

$$3x + 2y + 1 = 0$$

$$x - 3y + 4 = 0$$

---

$$3x + 2y + 1 = 0$$

$$\underline{\quad \quad \quad} \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad}$$
$$[[1]] - 3[[2]] \quad \quad \quad 11y - 11 = 0$$

$$y = 1$$

dopočítáme  $x$ :  $x - 3y + 4 = x - 3 \cdot 1 + 4 = 0$

$$x = -1$$

Přímky  $p$  a  $q$  se protínají v bodě  $P[-1;1]$ .

**Př. 6:** Najdi společné body přímek  $p = \{[2 - 3t; 1 + 2t], t \in R\}$  a  $r: 2x + 3y - 7 = 0$ . Podle počtu nalezených bodů rozhodni o jejich vzájemné poloze:

přímka  $p$ :  $x = 2 - 3t$   
 $y = 1 + 2t, t \in R$

přímka  $r$ :  $2x + 3y - 7 = 0$

společné body obou přímek musí vyhovovat oběma vyjádření  $\Rightarrow$  soustava tří rovnic o třech neznámých:

$$x = 2 - 3t$$

$$y = 1 + 2t \Rightarrow \text{z první a druhé rovnice dosadíme do třetí rovnice}$$

$$2x + 3y - 7 = 0$$

$$2(2 - 3t) + 3(1 + 2t) - 7 = 0$$

$$4 - 6t + 3 + 6t - 7 = 0$$

$0 = 0 \Rightarrow$  přímky mají nekonečně mnoho společných bodů (za  $t$  můžeme dosadit cokoliv)  $\Rightarrow$  přímky  $p$  a  $r$  jsou rovnoběžné

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad vyžaduje pouze orientaci ve směrových a normálových vektorech. Snažím se (i přeskočením některých předchozích příkladů), aby si ozkoušeli všichni. Studenti většinou pro přímku nepoužijí rovnou vektor  $u$ , ale vektor na něj kolmý. Říkám jim nejdříve jenom to, aby si ujasnili, co který z jejich vektorů znamená, případně si nakreslili obrázek. Při vysvětlování před třídou ho na tabuli kreslím také.

**Př. 7:** Je dána přímka  $p(A; u)$ ;  $A[1; -2]$ ,  $u = (-1; 2)$ . Najdi obecnou rovnici přímky  $r$ , která je na přímce  $p$  kolmá a prochází bodem  $A$ .

Hledaná přímka je kolmá na přímce  $p \Rightarrow$  normálový vektor přímky  $r$  se rovná směrovému vektoru přímky  $p$ :  $n_r = u_p = (-1; 2) \Rightarrow -x + 2y + c = 0$

Dosadíme bod  $A[1; -2]$ :  $-1 + 2(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 5$

Přímka  $r$  má obecnou rovnici  $-x + 2y + 5 = 0$

**Př. 8:** Najdi parametrické vyjádření přímky  $p: 3x - 4y + 5 = 0$ .

Pro parametrické vyjádření potřebujeme:

- směrový vektor: je kolmý na normálový  $n_p = (3; -4) \Rightarrow s_p = (4; 3)$
- jeden bod přímky: zvolíme si jednu souřadnici, druhou spočítáme (například  $x = 1 \Rightarrow 3x - 4y + 5 = 3 \cdot 1 - 4y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A[1; 2]$ )

Parametrické vyjádření přímky  $p$ :  
$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 2 + 3t, t \in R \end{aligned}$$

**Dodatek:** Je možné postupovat i jinak:

vypočítat z obecné rovnice dva body a sestavit parametrické vyjádření s jejich pomocí

jednu proměnou vyjádřit pomocí parametru (1. rovnice  $x = t$ ) a tímto vyjádřením

ji nahradit v obecné rovnici (2. rovnice  $3t - 4y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}t$ )

Vyjádření, která získáme, budou obecně různá.

**Př. 9:** Petáková:  
strana 105/cvičení 5

strana 105/cvičení 10  
strana 106/cvičení 13 a)

**Shrnutí:**