

7.3.2 Parametrické vyjádření přímky II

Předpoklady: 7301

Př. 1: Jsou dány body $A[-2;3]$ a $B[2;-1]$. Najdi parametrické vyjádření přímky AB . Urči souřadnice bodu $C[1;?]$ tak, aby ležel na přímce AB . Na které části přímky AB bod C leží?

Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: $A[-2;3]$
- směrový vektor: $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = B - A = (4; -4)$

\Rightarrow parametrické vyjádření přímky AB :
$$\begin{aligned} x &= -2 + 4t \\ y &= 3 - 4t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dosadíme bod C :
$$\begin{aligned} 1 &= -2 + 4t \\ y &= 3 - 4t \end{aligned}$$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme t a dosadíme do druhé.

$$\begin{aligned} 1 &= -2 + 4t \\ 3 &= 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4} \end{aligned} \qquad y = 3 - 4t = 3 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 0$$

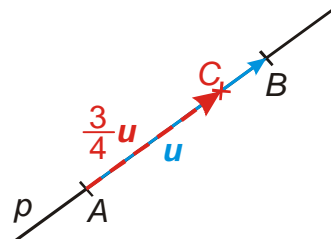
Bod C má souřadnice $C[1;0]$.

Bod C leží zřejmě na úsečce AB , protože jak jeho x -ová tak jeho y -ová souřadnice „leží“ mezi souřadnicemi bodů A, B .

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo s předchozím příkladem problémy (a má k dispozici vlastní sešit), je třeba ho trestat.

Nebylo by možné poznat polohu bodu na přímce z hodnoty parametru t ?

Nakreslíme si obrázek:



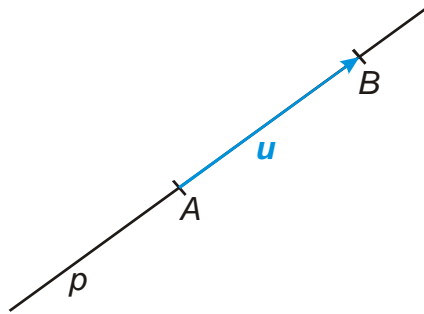
Bod C je určen hodnotou parametru $t = \frac{3}{4} \Rightarrow$ z bodu A se do bodu C dostaneme posunutím o vektor $\frac{3}{4}\mathbf{u} \Rightarrow$ bod C musí ležet na úsečce AB .

Př. 2: Do obrázku přímky p dané parametricky bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u} = B - A$ načrtni body X_1, X_2 a X_3 , které získáme, když do parametrického vyjádření

dosadíme hodnoty parametru t : a) $t_1 = 0,3$

b) $t_2 = 1,5$

c) $t_3 = -0,5$

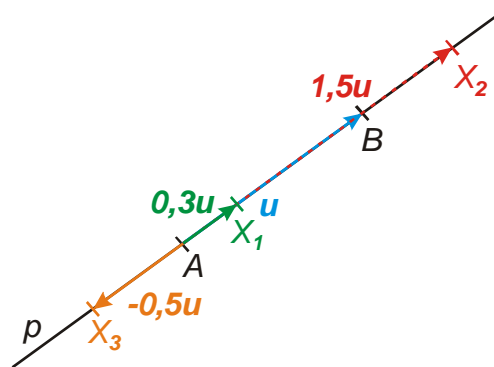


Napíšeme si dosazení hodnot parametru a do obrázku nakreslíme odpovídající bod:

$$X_1 = A + tu = A + 0,3u$$

$$X_2 = A + tu = A + 1,5u$$

$$X_3 = A + tu = A - 0,5u$$



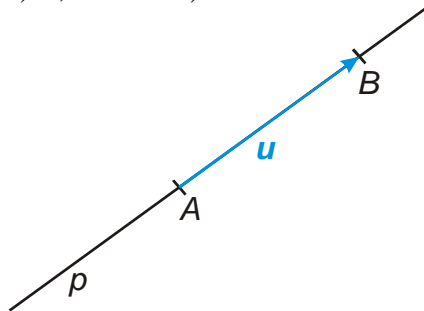
Př. 3: Na obrázku je nakreslena přímka p . Její parametrické vyjádření je dáno bodem A a směrovým vektorem $u = B - A$. Urči hodnoty parametru t , které budou v parametrickém vyjádření $X = A + tu$ náležet bodům:

a) A, B

b) na úsečce AB

c) polopřímce AB

d) polopřímce BA



a)

Do bodu A se z bodu A dostaneme posunutím o nulový vektor $\Rightarrow t = 0$

Do bodu B se z bodu A dostaneme posunutím o vektor $u \Rightarrow t = 1$

b)

Pokud chceme získat body na úsečce AB musíme se z bodu A posunovat o kladné násobky vektoru u menší než $1 \Rightarrow t \in \langle 0; 1 \rangle$

c)

Pokud chceme získat body na polopřímce AB musíme se z bodu A posunovat o kladné násobky vektoru $u \Rightarrow t \in \langle 0; \infty \rangle$

d)

Bodům na polopřímce BA odpovídají hodnoty parametru $t \in (-\infty; 1)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad vyřeší samostatně naprostá většina studentů.

Problémy se vyskytují maximálně v bodu a), v ostatních případech pak jde pouze o uzavřenost intervalů, v případě bodu d) pak nepozornost s hranou intervalu.

Předchozí příklad ukazuje velkou výhodu parametrického vyjádření přímky. Mimo celé přímky můžeme omezením hodnot parametru t vyjádřit i její části – polopřímky, úsečky.

Př. 4: Urči polohu bodu $C[-5;2]$ na přímce AB ; $A[1;5]$, $B[-3;3]$.

Parametrické vyjádření přímky AB :

- bod: $A[1;5]$
- směrový vektor: $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = B - A = (-4; -2)$

\Rightarrow parametrické vyjádření přímky AB :
$$\begin{aligned} x &= 1 - 4t \\ y &= 5 - 2t, t \in R \end{aligned}$$

Dosadíme bod C :
$$\begin{aligned} -5 &= 1 - 4t \\ 2 &= 5 - 2t \end{aligned}$$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme t a dosadíme do druhé.

$$\begin{aligned} -5 &= 1 - 4t & 2 &= 5 - 2t \\ -6 &= -4t \Rightarrow t = \frac{3}{2} & -3 &= -2t \Rightarrow t = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

\Rightarrow bod C leží na přímce AB na polopřímce AB za bodem B .

POZOR: Při sestavování parametrického vyjádření přímky AB se většinou postupuje jinak než při řešení předchozího příkladu:

Parametrické vyjádření přímky AB :

- bod: $A[1;5]$
- směrový vektor: $\mathbf{AB} = B - A = (-4; -2) \Rightarrow$ abychom měli snadnější počítání (s menšími čísly a bez mínusů) použijeme jako směrový vektor místo vektoru \mathbf{AB} jeho vhodný násobek (směr se tím nezmění) $\Rightarrow \mathbf{u} = -\frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (2; 1)$.

\Rightarrow parametrické vyjádření přímky AB :
$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 5 + t, t \in R \end{aligned}$$

Pokud do takto upraveného vyjádření dosadíme bod C nezískáme hodnotu parametru, ze které je možné ihned usoudit na jeho polohu na přímce AB :

Dosadíme bod C :
$$\begin{aligned} -5 &= 1 + 2t \\ 2 &= 5 + t \end{aligned}$$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme t a dosadíme do druhé.

$$\begin{aligned} -5 &= 1 + 2t & 2 &= 5 + t \\ -6 &= 2t \Rightarrow t = -3 & -3 &= t \end{aligned}$$

\Rightarrow zdá se, že bod C leží na přímce AB na polopřímce opačné k polopřímce AB (což není pravda)

\Rightarrow pokud používáme parametrické vyjádření pro zjišťování polohy bodu na přímce musíme použít neupravený směrový vektor (nebo jeho úpravu zohlednit).

Př. 5: Na přímce $s = \{[1+t; 3-2t], t \in R\}$ leží body $K[-1; 7]$ a $L[2; 1]$. Najdi parametrické vyjádření úsečky KL pomocí daného vyjádření přímky s .

Musíme najít hodnoty parametrů z parametrického vyjádření, pro které získáme body K a L .

Dosadíme bod K : $-1 = 1+t \Rightarrow t = -2$
 $7 = 3-2t \Rightarrow t = -2$

Dosadíme bod L : $2 = 1+t \Rightarrow t = 1$
 $1 = 3-2t \Rightarrow t = 1$

Úsečku KL můžeme parametricky zapsat takto: $KL = \{[1+t; 3-2t], t \in \langle -2; 1 \rangle\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad dělá studentům velké obtíže (možná právě pro svou jednoduchost), je proto lepší doporučit těm rychlejším, aby ho v případě, že je nic nenapadne vynechali a počkali až ho budete řešit s pomalejší částí třídy. Zabaví se na následujícím příkladu, který těm pomalejším zbude na doma (v případě zájmu).

Př. 6: Je dán trojúhelník ABC ; $A[-2; 3]$, $B[4; -1]$, $C[2; 5]$. Urči parametrické vyjádření přímky, na které leží:

a) strana AB	b) výška v_c
c) osa strany AB	d) těžnice t_a
	e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

a) strana AB

- bod: $A[-2; 3]$
- směrový vektor: $\mathbf{AB} = B - A = (6; -4) \Rightarrow \mathbf{u} = (3; -2)$

\Rightarrow parametrické vyjádření přímky AB :
$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t; t \in R \end{cases}$$

b) výška v_c

- bod: $C[2; 5]$
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky AB : $\Rightarrow \mathbf{u} = (2; 3)$

\Rightarrow parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_c :
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 3t; t \in R \end{cases}$$

c) osa strany AB

je kolmá na stranu AB , prochází jejím středem $S_{AB}[1; 1]$:

- bod: $S_{AB}[1; 1]$
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky AB : $\Rightarrow \mathbf{u} = (2; 3)$

\Rightarrow parametrické vyjádření osy strany AB :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t; t \in R \end{cases}$$

d) těžnice t_a

přímka určená body $A[-2; 3]$, $S_{BC}[3; 2]$

- bod: $A[-2; 3]$
- směrový vektor: $S_{BC} - A = (5; -1) \Rightarrow \mathbf{u} = (5; -1)$

⇒ parametrické vyjádření přímky, na které leží těžnice t_c :
$$\begin{aligned} x &= -2 + 5t \\ y &= 3 - t; t \in R \end{aligned}$$

e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

přímka určená body $S_{AB} [1;1]$, $S_{AC} [0;4]$

- bod: $S_{AB} [1;1]$
- směrový vektor: $S_{AC} - S_{AB} = (-1;3) \Rightarrow \mathbf{u} = (-1;3)$

⇒ parametrické vyjádření přímky, na které leží střední příčka $S_{AB}S_{AC}$:
$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 1 + 3t; t \in R \end{aligned}$$

Př. 7: Petáková:

strana 106/cvičení 22 a) c)

strana 106/cvičení 23 a) c)

Shrnutí: Omezením hodnot parametru můžeme vyjádřit i části přímky.