7.3.2 Parametrické vyjádření přímky II

Předpoklady: 7301

Př. 1: Jsou dány body $A[-2;3]$ a $B[2;-1]$. Najdi parametrické vyjádření přímky *AB*. Urči souřadnice bodu $C[1;?]$ tak, aby ležel na přímce *AB*. Na které části přímky *AB* bod *C* leží?

Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: $A[-2;3]$
- směrový vektor: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (4;-4)$

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{array}{l} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t, t \in R \end{array}$

Dosadíme **bod *C***: $\begin{array}{l} 1 = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t \end{array}$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme *t* a dosadíme do druhé.

$1 = -2 + 4t$

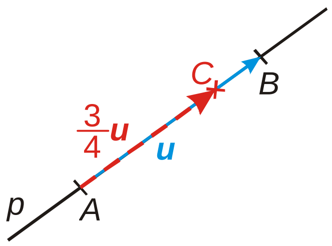
$3 = 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4}$ $\qquad y = 3 - 4t = 3 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 0$

Bod *C* má souřadnice $C[1;0]$.

Bod *C* leží zřejmě na úsečce *AB*, protože jak jeho *x*-ová tak jeho *y*-ová souřadnice „leží“ mezi souřadnicemi bodů *A*, *B*.

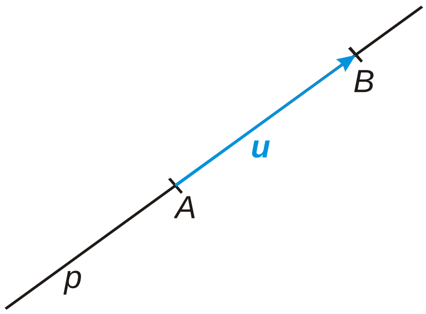
Pedagogická poznámka: Pokud má někdo s předchozím příkladem problémy (a má k dispozici vlastní sešit), je třeba ho trestat.

Nebylo by možné poznat polohu bodu na přímce z hodnoty parametru *t*?
Nakreslíme si obrázek:



Bod *C* je určen hodnotou parametru $t = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ z bodu *A* se do bodu *C* dostaneme posunutím o vektor $\frac{3}{4}\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ bod *C* musí ležet na úsečce *AB*.

Př. 2: Do obrázku přímky *p* dané parametricky bodem *A* a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = B - A$ načrtni body X_1, X_2 a X_3, které získáme, když do parametrického vyjádření dosadíme hodnoty parametru t: a) $t_1 = 0,3$ b) $t_2 = 1,5$ c) $t_3 = -0,5$

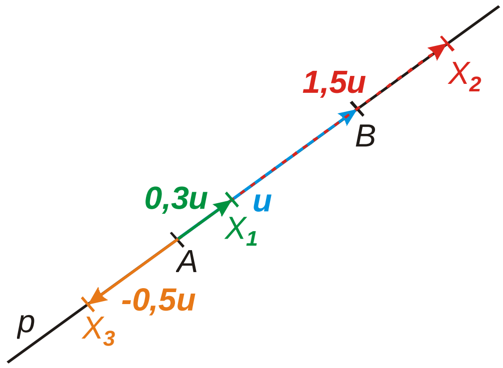


Napíšeme si dosazení hodnot parametru a do obrázku nakreslíme odpovídající bod:

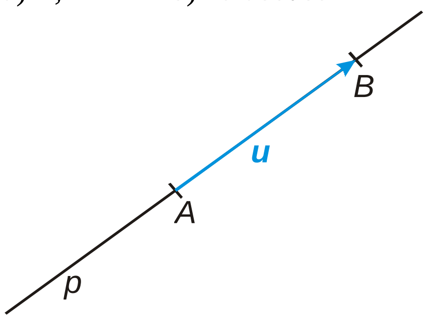
$X_1 = A + t\boldsymbol{u} = A + 0,3\boldsymbol{u}$

$X_2 = A + t\boldsymbol{u} = A + 1,5\boldsymbol{u}$

$X_3 = A + t\boldsymbol{u} = A - 0,5\boldsymbol{u}$



Př. 3: Na obrázku je nakreslena přímka *p*. Její parametrické vyjádření je dáno bodem *A* a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = B - A$. Urči hodnoty parametru *t*, které budou v parametrickém vyjádření $X = A + t\boldsymbol{u}$ náležet bodům:
a) *A*, *B* b) na úsečce *AB* c) polopřímce *AB* d) polopřímce *BA*



a)
Do bodu *A* se z bodu *A* dostaneme posunutím o nulový vektor $\Rightarrow \ t = 0$
Do bodu *B* se z bodu *A* dostaneme posunutím o vektor $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow \ t = 1$
b)
Pokud chceme získat body na úsečce *AB* musíme se z bodu *A* posunovat o kladné násobky vektoru $\boldsymbol{u}$ menší než 1 $\Rightarrow \ t \in \langle 0;1 \rangle$
c)
Pokud chceme získat body na polopřímce *AB* musíme se z bodu *A* posunovat o kladné násobky vektoru $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow \ t \in \langle 0;\infty)$
d)
Bodům na polopřímce *BA* odpovídají hodnoty parametru $t \in (-\infty;1\rangle$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad vyřeší samostatně naprostá většina studentů. Problémy se vyskytují maximálně v bodu a), v ostatních případech pak jde pouze o uzavřenost intervalů, v případě bodu d) pak nepozornost s hranou intervalu.

Předchozí příklad ukazuje velkou výhodu parametrického vyjádření přímky. Mimo celé přímky můžeme omezováním hodnot parametru t vyjádřit i její části – polopřímky, úsečky.

Př. 4: Urči polohu bodu $C[-5;2]$ na přímce AB; $A[1;5]$, $B[-3;3]$.

Parametrické vyjádření přímky AB:

- bod: $A[1;5]$
- směrový vektor: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (-4;-2)$

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření přímky AB: $\begin{aligned} x &= 1-4t \\ y &= 5-2t, t \in R \end{aligned}$

Dosadíme **bod *C***: $\begin{aligned} -5 &= 1-4t \\ 2 &= 5-2t \end{aligned}$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme t a dosadíme do druhé.

$-5 = 1-4t$	$2 = 5-2t$
$-6 = -4t \Rightarrow t = \frac{3}{2}$	$-3 = -2t \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ bod C leží na přímce AB na polopřímce AB za bodem B.

POZOR: Při sestavování parametrického vyjádření přímky AB se většinou postupuje jinak než při řešení předchozího příkladu:
Parametrické vyjádření přímky AB:

- bod: $A[1;5]$
- směrový vektor: $\boldsymbol{AB} = B - A = (-4;-2)$ $\Rightarrow$ abychom měli snadnější počítání (s menšími čísly a bez mínusů) použijeme jako směrový vektor místo vektoru $\boldsymbol{AB}$ jeho vhodný násobek (směr se tím nezmění) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2}(B-A) = (2;1)$.

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření přímky AB: $\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 5+t, t \in R \end{aligned}$

Pokud do takto upraveného vyjádření dosadíme bod C nezískáme hodnotu parametru, ze které je možné ihned usoudit na jeho polohu na přímce AB:

Dosadíme **bod *C***: $\begin{aligned} -5 &= 1+2t \\ 2 &= 5+t \end{aligned}$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme t a dosadíme do druhé.

$-5 = 1+2t$	$2 = 5+t$
$-6 = 2t \Rightarrow t = -3$	$-3 = t$

$\Rightarrow$ zdá se, že bod C leží na přímce AB na polopřímce opačné k polopřímce AB (což není pravda)

$\Rightarrow$ pokud používáme parametrické vyjádření pro zjišťování polohy bodu na přímce musíme použít neupravený směrový vektor (nebo jeho úpravu zohlednit).

Př. 5: Na přímce $s=\{[1+t;3-2t],t\in R\}$ leží body $K[-1;7]$ a $L[2;1]$. Najdi parametrické vyjádření úsečky *KL* pomocí daného vyjádření přímky *s*.

Musíme najít hodnoty parametrů z parametrického vyjádření, pro které získáme body *K* a *L*.

Dosadíme bod *K*: $\begin{aligned}-1&=1+t\Rightarrow t=-2\\7&=3-2t\Rightarrow t=-2\end{aligned}$

Dosadíme bod *L*: $\begin{aligned}2&=1+t\Rightarrow t=1\\1&=3-2t\Rightarrow t=1\end{aligned}$

Úsečku *KL* můžeme parametricky zapsat takto: $KL=\{[1+t;3-2t],t\in\langle-2;1\rangle\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad dělá studentům velké obtíže (možná právě pro svou jednoduchost), je proto lepší doporučit těm rychlejším, aby ho v případě, že je nic nenapadne vynechali a počkali až ho budete řešit s pomalejší částí třídy. Zabaví se na následujícím příkladu, který těm pomalejším zbude na doma (v případě zájmu).

Př. 6: Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[2;5]$. Urči parametrické vyjádření přímky, na které leží: a) strana *AB* b) výška v_c c) osa strany *AB* d) těžnice t_a e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

a) strana *AB*

- bod: $A[-2;3]$
- směrový vektor: $\boldsymbol{AB}=B-A=(6;-4)\Rightarrow\boldsymbol{u}=(3;-2)$

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{aligned}x&=-2+3t\\y&=3-2t;t\in R\end{aligned}$

b) výška v_c

- bod: $C[2;5]$
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky *AB*: $\Rightarrow\boldsymbol{u}=(2;3)$

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_c: $\begin{aligned}x&=2+2t\\y&=5+3t;t\in R\end{aligned}$

c) osa strany *AB*

je kolmá na stranu *AB*, prochází jejím středem $S_{AB}[1;1]$:

- bod: $S_{AB}[1;1]$
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky *AB*: $\Rightarrow\boldsymbol{u}=(2;3)$

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření osy strany *AB*: $\begin{aligned}x&=1+2t\\y&=1+3t;t\in R\end{aligned}$

d) těžnice t_a

přímka určená body $A[-2;3]$, $S_{BC}[3;2]$

- bod: $A[-2;3]$
- směrový vektor: $S_{BC}-A=(5;-1)\Rightarrow\boldsymbol{u}=(5;-1)$

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření přímky, na které leží těžnice t_c: $\begin{aligned} x &= -2+5t \\ y &= 3-t; t \in R \end{aligned}$

e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

přímka určená body $S_{AB}[1;1]$, $S_{AC}[0;4]$

- bod: $S_{AB}[1;1]$
- směrový vektor: $S_{AC} - S_{AB} = (-1;3) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (-1;3)$

$\Rightarrow$ parametrické vyjádření přímky, na které leží střední příčka $S_{AB}S_{AC}$: $\begin{aligned} x &= 1-t \\ y &= 1+3t; t \in R \end{aligned}$

Př. 7: Petáková:
strana 106/cvičení 22 a) c)
strana 106/cvičení 23 a) c)

Shrnutí: Omezením hodnot parametru můžeme vyjádřit i části přímky.