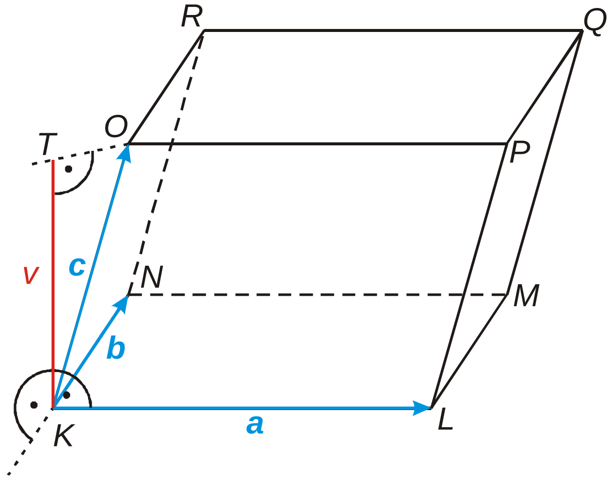
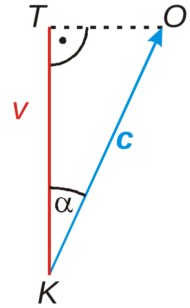
7.2.14 Smíšený součin

Jeho objem umíme spočítat stereometrickým vzorcem: $V = S_p v$.

$V = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot v$.





Platí $v = |\boldsymbol{c}|\cos\alpha$. $V = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot v = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}|\cos\alpha \Rightarrow$ vyjádřit úhel α.

Přímka *KT* je kolmá na rovnoběžník *KLMN* $\Rightarrow$ má směr jako vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \Rightarrow V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$

Objem rovnoběžnostěnu $V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ (absolutní hodnota řeší problémy s mínusem).

Číslo $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ nazýváme smíšený součin vektorů *a*, *b*, *c*.

Př. 1: Rozhodni, kdy se smíšený součin tři nenulových vektorů ***a***, ***b***, ***c*** rovná nule.

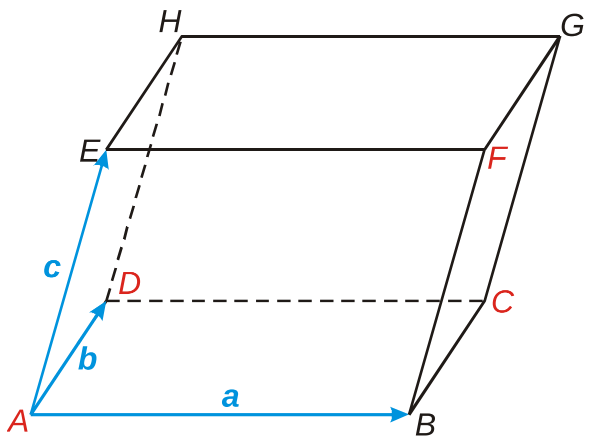
a) z vlastností skalárního součinu:
b) z významu smíšeného součinu
Objem je nulový, když vektory ***a***, ***b***, ***c*** neurčují rovnoběžnostěn, tedy leží v jedné rovině.

Př. 2: Objem rovnoběžnostěnu nezávisí na tom, kterou ze stěn zvolíme za podstavu. Které další smíšené součiny můžeme použít pro výpočet jeho objemu (a rovnají se součinu $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$)?

za podstavu bereme obdélník *KNRO* $\Rightarrow V = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$

za podstavu bereme obdélník *KLPO* $\Rightarrow V = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$

Př. 3: Jsou dány body $A[2;-2;1]$, $C[-1;1;3]$, $D[3;2;2]$ a $F[-3;1;-2]$. Urči objem rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH*.



$\boldsymbol{a} = C - D = (-4;-1;1)$, $\boldsymbol{b} = D - A = (1;4;1)$

$B = A + \boldsymbol{a} = [-2;-3;2]$

$\boldsymbol{c} = F - B = [-1;4;-4]$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-1-4;1+4;-16+1) = (-5;5;-15)$

$V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (-5;5;-15)(-1;4;-4) =$

$= 5 + 20 + 60 = 85$

Př. 4: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u}=(1;2;3)$, $\boldsymbol{v}=(1;1;1)$ a $\boldsymbol{w}=(1;3;1)$. Rozhodni, zda vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ leží v jedné rovině. Pokud v jedné rovině neleží, rozhodni, zda tvoří levotočivou nebo pravotočivou bázi.

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(2-3;3-1;1-2)=(-1;2;-1)$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(-1;2;-1)\cdot(1;3;1)=-1+6-1=4$$

Př. 5: Je dán čtyřstěn *ABCD*, $A[-2;-1;-2]$, $B[1;4;0]$, $C[1;1;3]$ a $D[2;5;3]$. Urči:

a) obsah stěny *BCD* b) délku výšky v_D v této stěně

c) objem čtyřstěnu d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu *BCD*

a) obsah stěny *BCD*

$\boldsymbol{u}=C-B=(0;-3;3)$ $\boldsymbol{v}=D-B=(1;1;3)$

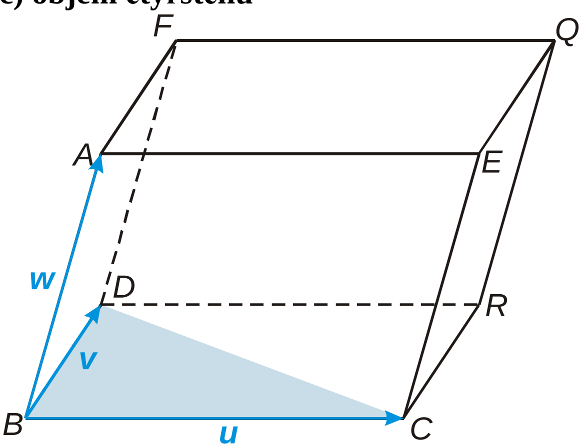
$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(-9-3;3-0;0+3)=(-12;3;3)$ $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=\sqrt{(-12)^2+3^2+3^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

b) délka výšky v_D ve stěně *BCD*

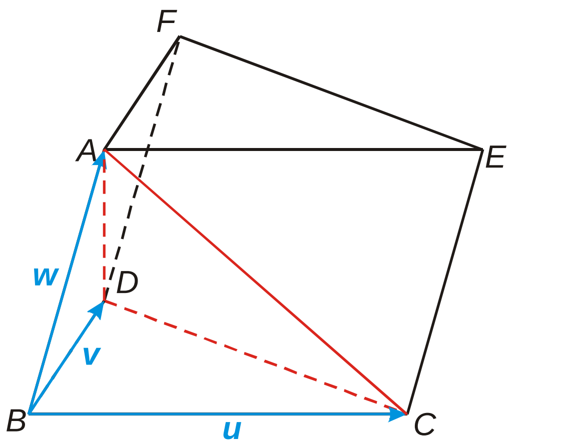
Výška v_D je kolmá na stranu *BC*. Určíme její délku, obsah trojúhelníku známe.

$$|BC|=|\boldsymbol{u}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \qquad S=\frac{av_a}{2}\Rightarrow v_a=\frac{2S}{a}\Rightarrow v_D=\frac{2S_{BCD}}{|BC|}=\frac{2\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}}=3$$

c) objem čtyřstěnu



obsah trojúhelníku *BCD* je polovinou obsahu odpovídajícího rovnoběžníku *BCRD*



objem čtyřstěnu *BCDA* je třetinou objemu odpovídajícího hranolu *BCDAEF* (obecné pravidlo pro objem jehlanu)

$\boldsymbol{w}=A-B=(-3;-3;-2)$ $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(-12;3;3)(-3;-3;-2)=36-9-6=21$

Objem čtyřstěnu *ABCD* je $\dfrac{21}{6}$.

d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu *BCD*

Objem čtyřstěnu můžeme také spočítat stereometricky vztahem $V=\frac{1}{3}S_p v\Rightarrow v=\frac{3V}{S_p}$.

$$v=\frac{3V}{S_p}=\frac{3\frac{21}{6}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}}=\frac{21}{9\sqrt{2}}=\frac{7}{3\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{6}$$

Př. 6: Petáková:
strana 103/cvičení 56
strana 104/cvičení 58
strana 104/cvičení 59 b)