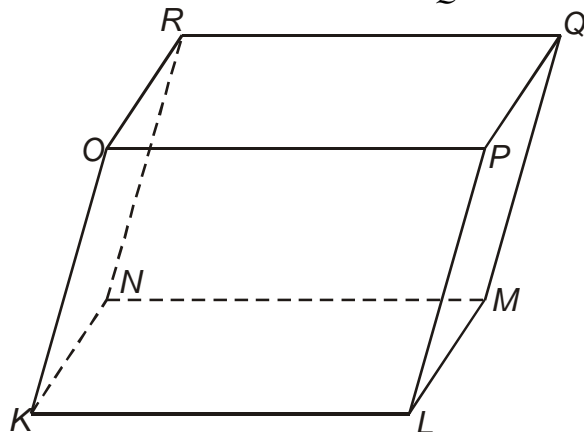


## 7.2.14 Smíšený součin

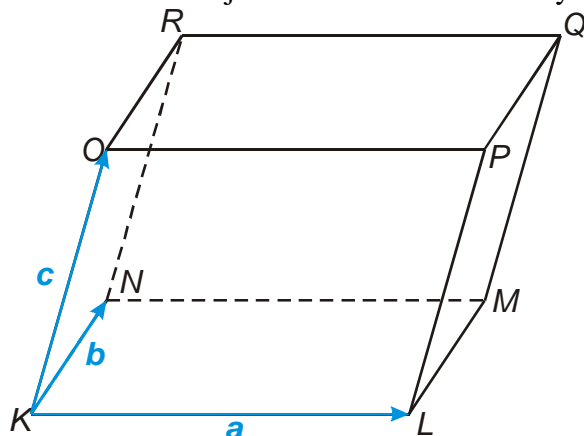
**Předpoklady:** 7213

Je dán rovnoběžnostěn  $KLMNOPQR$ .



Jeho objem umíme spočítat stereometrickým vzorcem:  $V = S_p v$ .

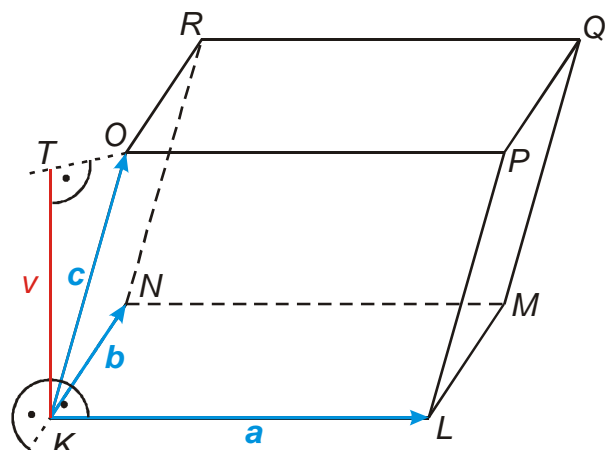
Rovnoběžnostěn je také určen třemi vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$



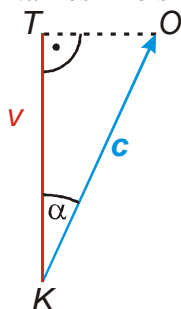
$\Rightarrow$  jeho objem musí jít spočítat i pomocí těchto tří vektorů.

První krok už víme:  $S_p = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  (velikost vektorového součinu  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  se rovná obsahu rovnoběžníku  $ABCD$  – vlastnost vektorového součinu)  $\Rightarrow V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot v$ .

Musíme určit výšku (kolmou vzdálenost mezi rovinami  $KLMN$  a  $OPQR$ ) pomocí vektoru  $\mathbf{c}$ .



Nakreslíme si pravoúhlý trojúhelník  $KOT$ .



Z obrázku je vidět, že platí  $v = |c| \cos \alpha$ .

Dosadíme:  $V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot v = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |c| \cos \alpha \Rightarrow$  jsme skoro hotoví, zbývá pomocí vektorů vyjádřit úhel  $\alpha$ .

Přímka  $KT$  je kolmá na rovnoběžník  $KLMN \Rightarrow$  má stejný směr jako vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow$  úhel  $\alpha$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  a  $\mathbf{c} \Rightarrow$  vztah  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |c| \cos \alpha$  je vztah pro výpočet skalárního součinu z velikosti vektorů  $\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |c| \cos \alpha = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ .

$\Rightarrow$  Jsme hotoví:  $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

Malý zádrhel:

Vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$  na našem obrázku tvoří pravotočivou bázi  $\Rightarrow$  proto směřuje vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  do stejného poloprostoru jako vektor  $\mathbf{c}$ .

Kdyby vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$  tvořily levotočivou bázi, vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  by směřoval do opačného poloprostoru než vektor  $\mathbf{c} \Rightarrow$  výsledek by byl záporný  $\Rightarrow$  museli bychom ho vynásobit mínusem, abychom získali kladné číslo.

**Objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$  určíme ze vzorce  $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$  (absolutní hodnota řeší případné problémy s mínusem).**

**Číslo  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  nazýváme smíšený součin vektorů  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ .**

**Př. 1:** Rozhodni, kdy se smíšený součin tří nenulových vektorů  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  rovná nule.

Dvě možnosti řešení:

**a) z vlastností skalárního součinu:**

skalární součin se rovná nule:

- jeden z vektorů je roven nule  $\Rightarrow$  vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  je nulový  $\Rightarrow$  vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  jsou rovnoběžné
- vektory jsou na sebe kolmé  $\Rightarrow$  vektor  $\mathbf{c}$  je kolmý na vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$   $\Rightarrow$  vektor  $\mathbf{c}$  leží v rovině určené vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ .

$\Rightarrow$  smíšený součin je nulový, právě když vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  leží v jedné rovině (jsou lineárně závislé)

### **b) z významu smíšeného součinu**

Absolutní hodnota smíšeného součinu se rovná objemu rovnoběžnostěnu. Objem je nulový, když vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  neurčují rovnoběžnostěn  $\Rightarrow$  pokud vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  leží v jedné rovině.

**Př. 2:** Objem rovnoběžnostěnu nezávisí na tom, kterou ze stěn zvolíme za podstavu. Které další smíšené součiny můžeme použít pro výpočet jeho objemu (a rovnají se součinu  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ )?

za podstavu bereme obdélník  $KNRO \Rightarrow V = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$

za podstavu bereme obdélník  $KLPO \Rightarrow V = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

Pro každé tři vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  v prostoru platí:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ .

**Dodatek:** Pomocí předchozí rovnosti se dokazuje distributivnost vektorového součinu a jeho asociativnost při násobení reálným číslem.

Máme smíšený součin libovolných vektorů  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  a  $\mathbf{x}$ .

$$(\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}]) \cdot \mathbf{x}$$

provedeme posunutí vektorů podle vzorce  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ :

$$(\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}]) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot [\mathbf{b} + \mathbf{c}]$$

skalární součin je distributivní:  $(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot [\mathbf{b} + \mathbf{c}] = (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$

provedeme posunutí vektorů podle vzorce  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ :

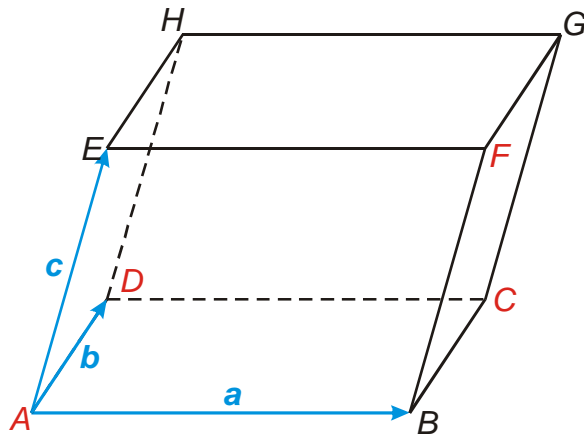
$$(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}$$

vytkneme  $\mathbf{x}$ :  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}$

Platí tedy:  $(\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}]) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}$

a tedy  $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$  - vektorový součin je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů

**Př. 3:** Jsou dány body  $A[2;-2;1]$ ,  $C[-1;1;3]$ ,  $D[3;2;2]$  a  $F[-3;1;-2]$ . Urči objem rovnoběžnostěny  $ABCDEFGH$ .



Nejdříve určíme vektory  $a, b, c$ .

Z obrázku je vidět:  $a = C - D = (-4; -1; 1)$     $b = D - A = (1; 4; 1)$

$c = F - B$  - souřadnice bodu  $B$  musíme určit výpočtem:  $B = A + a = [-2; -3; 2]$

$$c = F - B = [-1; 4; -4]$$

Počítáme smíšený součin  $V = (a \times b) \cdot c$

$$a \times b = (-1 - 4; 1 + 4; -16 + 1) = (-5; 5; -15)$$

$$V = (a \times b) \cdot c = (-5; 5; -15) \cdot (-1; 4; -4) = 5 + 20 + 60 = 85$$

Rovnoběžnostěn má objem 85.

**Pedagogická poznámka:** Příklad by mohl být předpřipravenější. Studenti musí vektory najít na jiném místě, než na kterém byly nakresleny při odvozování smíšeného součinu. U některých studentů se opět objevují problémy s tím, že vektory jsou někde jinde (studenti mají pocit, že když jsou jiné souřadnice bodů, musí být jiné i souřadnice vektorů. Vrací se tím opět problém z úvodu kapitoly, kdy je těžké studentům vysvětlit, že u vektorů na umístění nezáleží).  
Doporučuji strategii pro výběr vektorů po chvílce probrat společně.

**Př. 4:** Jsou dány vektory  $u = (1; 2; 3)$ ,  $v = (1; 1; 1)$  a  $w = (1; 3; 1)$ . Rozhodni, zda vektory  $u, v, w$  leží v jedné rovině. Pokud v jedné rovině neleží, rozhodni, zda tvoří levotočivou nebo pravotočivou bázi.

Spočteme smíšený součin vektorů  $u, v, w$  a z hodnoty výsledku budeme moci odpovědět na otázku.

$$u \times v = (2 - 3; 3 - 1; 1 - 2) = (-1; 2; -1)$$

$$(u \times v) \cdot w = (-1; 2; -1) \cdot (1; 3; 1) = -1 + 6 - 1 = 4$$

Smíšený součin vektorů  $u, v, w$  je kladné číslo  $\Rightarrow$

- vektory  $u, v, w$  neleží v jedné rovině
- vektory  $u, v, w$  tvoří pravotočivou bázi.



Objem čtyřstěnu můžeme také spočítat stereometricky vztahem  $V = \frac{1}{3} S_p v \Rightarrow v = \frac{3V}{S_p}$ .

Objem čtyřstěnu i obsah podstavy  $BCD$  známe. Dosadíme:

$$v = \frac{3V}{S_p} = \frac{3 \frac{21}{6}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{21}{9\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Výška čtyřstěnu kolmá na stěnu  $BCD$  má délku  $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ .

**Př. 6:** Petáková:  
strana 103/cvičení 56  
strana 104/cvičení 58  
strana 104/cvičení 59 b)

**Shrnutí:**