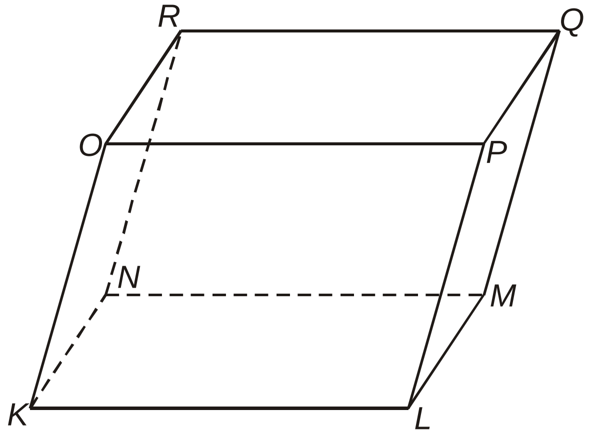
7.2.14 Smíšený součin

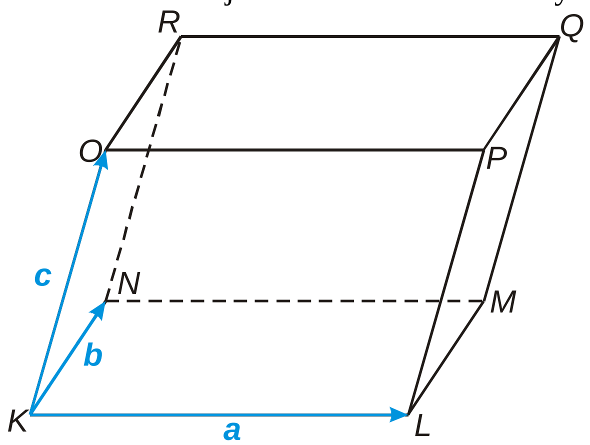
Předpoklady: 7213

Je dán rovnoběžnostěn *KLMNOPQR*.



Jeho objem umíme spočítat stereometrickým vzorcem: $V = S_p v$.

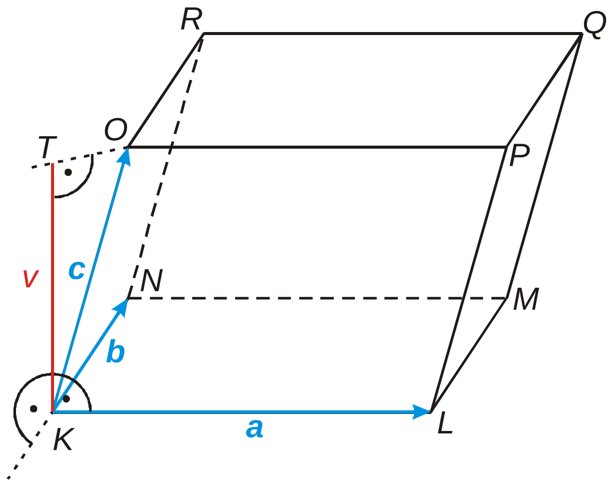
Rovnoběžnostěn je také určen třemi vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$



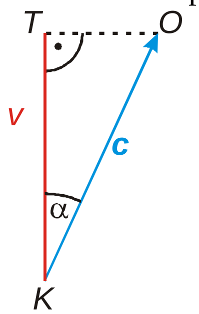
$\Rightarrow$ jeho objem musí jít spočítat i pomocí těchto tří vektorů.

První krok už víme: $S_p = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ (velikost vektorového součinu $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ se rovná obsahu rovnoběžníku *ABCD* – vlastnost vektorového součinu) $\Rightarrow V = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot v$.

Musíme určit výšku (kolmou vzdálenost mezi rovinami *KLMN* a *OPQR*) pomocí vektoru $\boldsymbol{c}$.



Nakreslíme si pravoúhlý trojúhelník *KOT*.



Z obrázku je vidět, že platí $v = |\boldsymbol{c}|\cos\alpha$.

Dosadíme: $V = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot v = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$ $\Rightarrow$ jsme skoro hotoví, zbývá pomocí vektorů vyjádřit úhel α.

Přímka *KT* je kolmá na rovnoběžník *KLMN* $\Rightarrow$ má stejný směr jako vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ úhel α je úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ $\Rightarrow$ vztah $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$ je vztah pro výpočet skalárního součinu z velikosti vektorů $\Rightarrow$ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\alpha = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

$\Rightarrow$ Jsme hotoví: $V = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

Malý zádrhel:
Vektory ***a***, ***b*** a ***c*** na našem obrázku tvoří pravotočivou bázi $\Rightarrow$ proto směřuje vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ do stejného poloprostoru jako vektor ***c***.
Kdyby vektory ***a***, ***b*** a ***c*** tvořily levotočivou bázi, vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ by směřoval do opačného poloprostoru než vektor ***c*** $\Rightarrow$ výsledek by byl záporný $\Rightarrow$ museli bychom ho vynásobit mínusem, abychom získali kladné číslo.

Objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory *a*, *b* a *c* určíme ze vzorce $V = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ (absolutní hodnota řeší případné problémy s mínusem).
Číslo $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ nazýváme smíšený součin vektorů *a*, *b*, *c*.

Př. 1: Rozhodni, kdy se smíšený součin tři nenulových vektorů ***a***, ***b***, ***c*** rovná nule.

Dvě možnosti řešení:
a) z vlastností skalárního součinu:
skalární součin se rovná nule:

- jeden z vektorů je roven nule $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je nulový $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou rovnoběžné
- vektory jsou na sebe kolmé $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{c}$ leží v rovině určené vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

$\Rightarrow$ smíšený součin je nulový, právě když vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ leží v jedné rovině (jsou lineárně závislé)

b) z významu smíšeného součinu

Absolutní hodnota smíšeného součinu se rovná objemu rovnoběžnostěnu. Objem je nulový, když vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ neurčují rovnoběžnostěn $\Rightarrow$ pokud vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ leží v jedné rovině.

Př. 2: Objem rovnoběžnostěnu nezávisí na tom, kterou ze stěn zvolíme za podstavu. Které další smíšené součiny můžeme použít pro výpočet jeho objemu (a rovnají se součinu $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$)?

za podstavu bereme obdélník *KNRO* $\Rightarrow$ $V = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$

za podstavu bereme obdélník *KLPO* $\Rightarrow$ $V = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$

Pro každé tři vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ v prostoru platí: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$.

Dodatek: Pomocí předchozí rovnosti se dokazuje distributivnost vektorového součinu a jeho asociativnost při násobení reálným číslem.
Máme smíšený součin libovolných vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{x}$.

$(\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}]) \cdot \boldsymbol{x}$

provedeme posunutí vektorů podle vzorce $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$:

$(\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}]) \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}) \cdot [\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}]$

skalární součin je distributivní: $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}) \cdot [\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c}$

provedeme posunutí vektorů podle vzorce $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$:

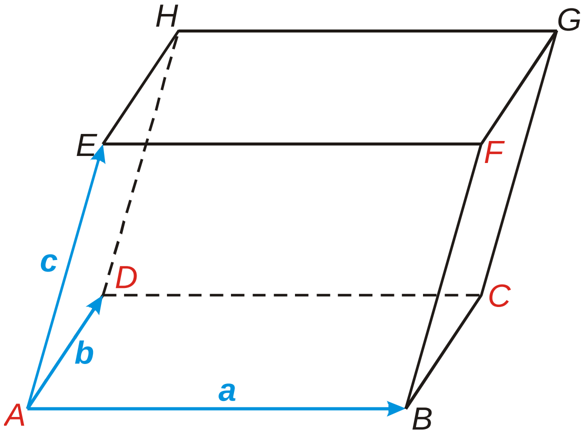
$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x}$

vytkneme $\boldsymbol{x}$: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x}$

Platí tedy: $(\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}]) \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x}$

a tedy $\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ - vektorový součin je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů

Př. 3: Jsou dány body $A[2;-2;1]$, $C[-1;1;3]$, $D[3;2;2]$ a $F[-3;1;-2]$. Urči objem rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH*.



Nejdříve určíme vektory ***a***, ***b***, ***c***.

Z obrázku je vidět: $\boldsymbol{a} = C - D = (-4;-1;1)$ $\boldsymbol{b} = D - A = (1;4;1)$

$\boldsymbol{c} = F - B$ - souřadnice bodu B musíme určit výpočtem: $B = A + \boldsymbol{a} = [-2;-3;2]$

$\boldsymbol{c} = F - B = [-1;4;-4]$

Počítáme smíšený součin $V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-1-4;1+4;-16+1) = (-5;5;-15)$

$V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (-5;5;-15)(-1;4;-4) = 5 + 20 + 60 = 85$

Rovnoběžnostěn má objem 85.

Pedagogická poznámka: Příklad by mohl být předpřipravenější. Studenti musí vektory najít na jiném místě, než na kterém byly nakresleny pří odvozování smíšeného součinu. U některých studentů se opět objevují problémy s tím, že vektory jsou někde jinde (studenti mají pocit, že když jsou jiné souřadnice bodů, musí být jiné i souřadnice vektorů. Vrací se tím opět problém z úvodu kapitoly, kdy je těžké studentům vysvětlit, že u vektorů na umístění nezáleží).
Doporučuji strategii pro výběr vektorů po chvilce probrat společně.

Př. 4: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1;2;3)$, $\boldsymbol{v} = (1;1;1)$ a $\boldsymbol{w} = (1;3;1)$. Rozhodni, zda vektory ***u***, ***v***, ***w*** leží v jedné rovině. Pokud v jedné rovině neleží, rozhodni, zda tvoří levotočivou nebo pravotočivou bázi.

Spočteme smíšený součin vektorů ***u***, ***v***, ***w*** a z hodnoty výsledku budeme moci odpovědět na otázky.

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (2-3;3-1;1-2) = (-1;2;-1)$

$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (-1;2;-1) \cdot (1;3;1) = -1 + 6 - 1 = 4$

Smíšený součin vektorů ***u***, ***v***, ***w*** je kladné číslo $\Rightarrow$

- vektory ***u***, ***v***, ***w*** neleží v jedné rovině
- vektory ***u***, ***v***, ***w*** tvoří pravotočivou bázi.

Př. 5: Je dán čtyřstěn $ABCD$, $A[-2;-1;-2]$, $B[1;4;0]$, $C[1;1;3]$ a $D[2;5;3]$. Urči:

a) obsah stěny BCD — b) délku výšky v_D v této stěně

c) objem čtyřstěnu — d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu BCD

a) obsah stěny *BCD*

využijeme velikost vektorového součinu vektorů dvou stran trojúhelníku, který stěnu tvoří

$\boldsymbol{u} = C - B = (0;-3;3)$ $\quad$ $\boldsymbol{v} = D - B = (1;1;3)$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (-9-3;3-0;0+3) = (-12;3;3)$

$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-12)^2+3^2+3^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

Stěnu tvoří trojúhelník, má tedy poloviční obsah než je velikost vektorového součinu $\Rightarrow$

$S_{BCD} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

b) délka výšky v_D ve stěně *BCD*

Obsah trojúhelníku můžeme určit planimetricky vztahem $S = \frac{av_a}{2} \Rightarrow v_a = \frac{2S}{a}$.

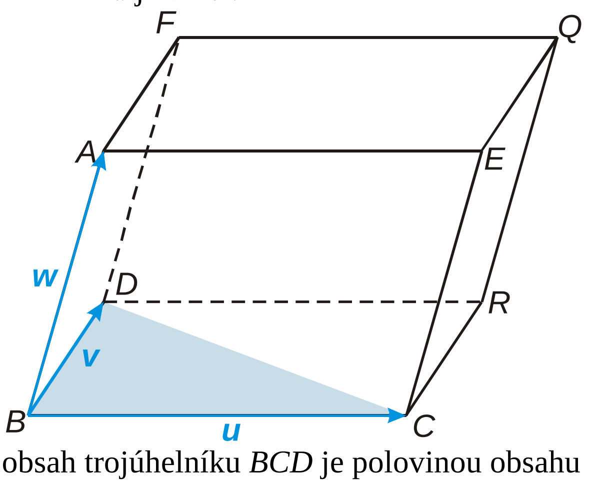
Výška v_D je kolmá na stranu BC. Určíme její délku, obsah trojúhelníku známe.

$|BC| = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

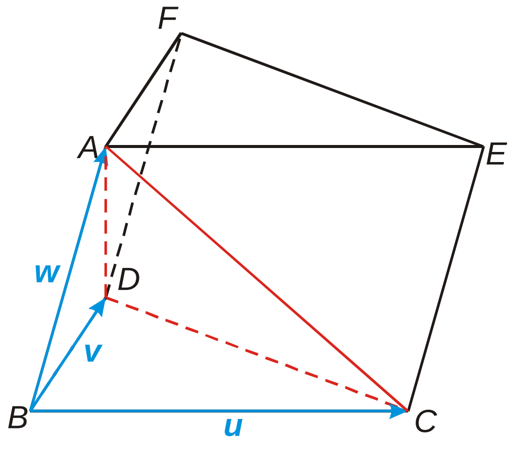
$$v_D = \frac{2S_{BCD}}{|BC|} = \frac{2\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = 3$$

c) objem čtyřstěnu

z obrázků je vidět:



obsah trojúhelníku BCD je polovinou obsahu odpovídajícího rovnoběžníku $BCRD$



objem čtyřstěnu $BCDA$ je třetinou objemu odpovídajícího hranolu $BCDAEF$ (obecné pravidlo pro objem jehlanu)

$\Rightarrow$ objem čtyřstěnu je šestinou smíšeného součinu $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$

$\boldsymbol{w} = A - B = (-3;-3;-2)$

$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (-12;3;3)(-3;-3;-2) = 36-9-6 = 21$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je $\frac{21}{6}$.

d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu *BCD*

Objem čtyřstěnu můžeme také spočítat stereometricky vztahem $V=\frac{1}{3}S_p v \Rightarrow v=\frac{3V}{S_p}$.

Objem čtyřstěnu i obsah podstavy *BCD* známe. Dosadíme:

$$v=\frac{3V}{S_p}=\frac{3\frac{21}{6}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}}=\frac{21}{9\sqrt{2}}=\frac{7}{3\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Výška čtyřstěnu kolmá na stěnu *BCD* má délku $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

Př. 6: Petáková:
strana 103/cvičení 56
strana 104/cvičení 58
strana 104/cvičení 59 b)

Shrnutí: