7.2.13 Vektorový součin II

Předpoklady: 7212

V minulé hodině jsme skončili vzorcem pro výpočet vektorového součinu ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$

Jeden z nejhorších vzorců na zapamatování $\Rightarrow$ naštěstí jsou v něm určité pravidelnosti $\Rightarrow$ dají se najít nějaké mnemotechnické pomůcky

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

šipka znamená součin čísel, které spojuje, šipky dolů jsou kladné, šipky nahoru záporné $\Rightarrow$
$a \times b = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$

Pedagogická poznámka: Při hodině nechávám studenty samostatně napsat už poslední souřadnici z předchozího součinu. Součin s konkrétními čísly pak studenti zkouší počítat sami. Občas se někomu podaří spočítat vektorový součin jako jedno číslo. Pak nezbývá než se vrátit k tomu, že by každý měl mít základní očekávání toho, jak bude výsledek vypadat, což v případě vektorového součinu znamená trojici čísel.

Tento způsob zápisu je výhodnější nejen pro zapamatování vzorce, ale i pro výpočet vektorového součinu konkrétních vektorů:
Spočteme vektorový součin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vektorů $\boldsymbol{a} = (1; 2; -3)$ a $\boldsymbol{b} = (2; -3; 0)$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \end{array}$$

$a \times b = (2 \cdot 0 - (-3)(-3); (-3)2 - 0 \cdot 1; 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2) = (-9; -6; -7)$

Poznámka: Pomůcek pro zápis vektorového součinu je samozřejmě víc. Autor sám používá tento a zdá se mu, že studentům činí jen velmi malé potíže s ním pracovat. Tím nijak nevylučuje používání jiných metod, sám jenom nabízí to, co se mu zdá nejlepší.

Př. 1: Vypočti vektorový součin vektorů:
a) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 3)$ $\boldsymbol{b} = (1; 2; 3)$ b) $\boldsymbol{a} = (1; 2; 3)$ $\boldsymbol{b} = (-2; 1; 3)$
c) $\boldsymbol{a} = (-2; 3; 1)$, $\boldsymbol{b} = (4; -6; -2)$
Výsledky zkontroluj pomocí vlastností vektorového součinu.

a) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 3)$ $\boldsymbol{b} = (1; 2; 3)$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (1 \cdot 3 - 3 \cdot 2; 3 \cdot 1 - (-2)3; (-2)2 - 1 \cdot 1) = (-3; 9; -5)$

b) $\boldsymbol{a}=(1;2;3)$ $\boldsymbol{b}=(-2;1;3)$

1 2 3 1 2

-2 1 3 -2 1

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2\cdot 3-3\cdot 1;3\cdot(-2)-1\cdot 3;1\cdot 1-2\cdot(-2))=(3;-9;5)$

V příkladech a) a b) vyšly navzájem opačné vektory, protože jsme násobili v obou případech stejné vektory, ale v opačném pořadí.

c) $\boldsymbol{a}=(-2;3;1)$, $\boldsymbol{b}=(4;-6;-2)$

-2 3 1 -2 3

4 -6 -2 4 -6

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(3\cdot(-2)-1\cdot(-6);1\cdot 4-(-2)(-2);(-2)(-6)-3\cdot 4)=(0;0;0)$

V příkladu c) vyšel nulový vektor, protože platí: $\boldsymbol{b}=(-2)\boldsymbol{a}$ $\Rightarrow$ násobíme dva vektory, které leží na jedné přímce.

Př. 2: Zapiš všechny vektory, kterou jsou kolmé zároveň na vektor $\boldsymbol{u}=(2;0;1)$ a $\boldsymbol{v}=(-1;1;5)$.

2 0 1 2 0

-1 1 5 -1 1

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(0\cdot 5-1\cdot 1;1\cdot(-1)-5\cdot 2;2\cdot 1-(-1)\cdot 0)=(-1;-11;2)$

Podmínku splňují i všechny další vektory, které jsou s vektorem $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ rovnoběžné.
$\Rightarrow$ řešením jsou všechny vektory $k(-1;-11;2)$, kde $k\in R-\{0\}$.

Př. 3: Najdi vektor $\boldsymbol{c}$ tak, aby byl kolmý na vektory $\boldsymbol{a}=(1;0;1)$ a $\boldsymbol{b}=(1;2;2)$ a platilo $|\boldsymbol{c}|=6$.

Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ je rovnoběžný s vektorovým součinem těchto vektorů $\Rightarrow$ spočtu vektorový součin a pak ho vynásobím vhodným číslem, aby měl požadovanou velikost.

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(0\cdot 2-2\cdot 1;1\cdot 1-2\cdot 1;1\cdot 2-1\cdot 0)=(-2;-1;2)$

$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=3$

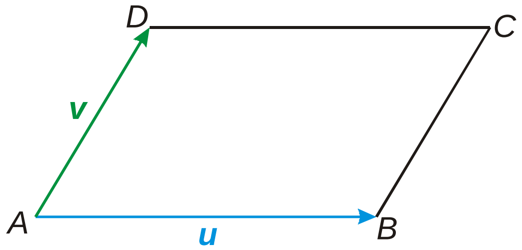
$\Rightarrow$

- $\boldsymbol{c}_1=2\cdot\boldsymbol{u}\Rightarrow$ $\boldsymbol{c}_1=2(-2;-1;2)=(-4;-2;4)$
- $\boldsymbol{c}_2=(-2)\cdot\boldsymbol{u}\Rightarrow$ $\boldsymbol{c}_2=(-2)(-2;-1;2)=(4;2;-4)$

Pedagogická poznámka: Hodinu řídím tak, aby se na následujícím příkladu synchronizovala třída tak 15 minut před koncem hodiny.

Př. 4: Urči obsah rovnoběžníku *ABCD* pokud platí: $A[-1;-2;1]$, $B[2;0;2]$, $C[1;1;-1]$.

Obsah rovnoběžníku *ABCD* můžeme určit jako velikost vektorového součinu vektorů, které je možné umístit na jeho sousední strany (víme z minulé hodiny. Jde o geometrický význam velikost vektorového součinu $|\boldsymbol{w}|=|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\sin\alpha$).



Nejdříve určíme souřadnice vektorů:

$\boldsymbol{u}=B-A=(3;2;1)$

$\boldsymbol{v}=C-B=(-1;1;-3)$ souřadnice bodu *D* neznáme, nemůžeme ho určit jako $D-A$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(2\cdot(-3)-1\cdot1;1\cdot(-1)-(-3)\cdot3;3\cdot1-(-1)\cdot2)=(-7;8;5)$

Velikost vektoru $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=\sqrt{(-7)^2+8^2+5^2}=\sqrt{138}\doteq 11,75$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají tendenci určovat plochu z obrácené strany rovnosti $|\boldsymbol{w}|=|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\sin\alpha$, tedy určením velikostí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a úhlu α.

Př. 5: Urči obsah trojúhelníku *ABC* pokud platí: $A[-2;-2]$, $B[3;-1]$, $C[1;4]$

Dva problémy:

- vektorový součin určuje obsah rovnoběžníku, pro trojúhelník platí: $S=\frac{bc\sin\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ spočteme vektorový součin a jeho velikost vydělíme dvěma.
- vektorový součin je určen pouze pro vektory v prostoru, příklad je však zadán v rovině (spočítat jít musí, protože smysl má) $\Rightarrow$ přidáme k souřadnicím bodů třetí souřadnici (vždy stejnou, nejlépe nulovou).

Body v prostoru: $A[-2;-2;0]$, $B[3;-1;0]$, $C[1;4;0]$

Vektory: $\boldsymbol{b}=B-A=(5;1;0)$, $\boldsymbol{c}=C-A=(3;6;0)$

Vektorový součin: $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(1\cdot0-6\cdot0;0\cdot3-0\cdot5;5\cdot6-3\cdot1)=(0;0;27)$

Velikost vektorového součinu: $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=\sqrt{0^2+0^2+27^2}=27$

Obsah trojúhelníku: $S=\frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|}{2}=\frac{27}{2}=13,5$.

Trojúhelník má obsah 13,5.

Př. 6: Petáková:
strana 103/cvičení 46 b)
strana 103/cvičení 47 a)
strana 103/cvičení 48 c)
strana 103/cvičení 50

strana 103/cvičení 51
strana 103/cvičení 53

Shrnutí: