7.2.13 Vektorový součin II

Předpoklady: 7212

V minulé hodině jsme skončili vzorcem pro výpočet vektorového součinu ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$

Jeden z nejhorších vzorců na zapamatování $\Rightarrow$ naštěstí jsou v něm určité pravidelnosti $\Rightarrow$ dají se najít nějaké mnemotechnické pomůcky

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

šipka znamená součin čísel, které spojuje, šipky dolů jsou kladné, šipky nahoru záporné $\Rightarrow$
$a\times b=\left(a_2b_3-b_2a_3;a_3b_1-b_3a_1;a_1b_2-b_1a_2\right)$

Pedagogická poznámka: Při hodině nechávám studenty samostatně napsat už poslední souřadnici z předchozího součinu. Součin s konkrétními čísly pak studenti zkouší počítat sami. Občas se někomu podaří spočítat vektorový součin jako jedno číslo. Pak nezbývá než se vrátit k tomu, že by každý měl mít základní očekávání toho, jak bude výsledek vypadat, což v případě vektorového součinu znamená trojici čísel.

Tento způsob zápisu je výhodnější nejen pro zapamatování vzorce, ale i pro výpočet vektorového součinu konkrétních vektorů:
Spočteme vektorový součin $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektorů $\boldsymbol{a}=(1;2;-3)$ a $\boldsymbol{b}=(2;-3;0)$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \end{array}$$

$a\times b=\left(2\cdot0-(-3)(-3);(-3)2-0\cdot1;1\cdot(-3)-2\cdot2\right)=(-9;-6;-7)$

Poznámka: Pomůcek pro zápis vektorového součinu je samozřejmě víc. Autor sám používá tento a zdá se mu, že studentům činí jen velmi malé potíže s ním pracovat. Tím nijak nevylučuje používání jiných metod, sám jenom nabízí to, co se mu zdá nejlepší.

Př. 1: Vypočti vektorový součin vektorů:
a) $\boldsymbol{a}=(-2;1;3)$ $\boldsymbol{b}=(1;2;3)$ b) $\boldsymbol{a}=(1;2;3)$ $\boldsymbol{b}=(-2;1;3)$
c) $\boldsymbol{a}=(-2;3;1)$, $\boldsymbol{b}=(4;-6;-2)$
Výsledky zkontroluj pomocí vlastností vektorového součinu.

a) $\boldsymbol{a}=(-2;1;3)$ $\boldsymbol{b}=(1;2;3)$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(1\cdot3-3\cdot2;3\cdot1-(-2)3;(-2)2-1\cdot1\right)=(-3;9;-5)$

b) $\boldsymbol{a}=(1;2;3)$ $\boldsymbol{b}=(-2;1;3)$

1 2 3 1 2

-2 1 3 -2 1

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2\cdot 3-3\cdot 1;3\cdot(-2)-1\cdot 3;1\cdot 1-2\cdot(-2))=(3;-9;5)$

V příkladech a) a b) vyšly navzájem opačné vektory, protože jsme násobili v obou případech stejné vektory, ale v opačném pořadí.

c) $\boldsymbol{a}=(-2;3;1)$, $\boldsymbol{b}=(4;-6;-2)$

-2 3 1 -2 3

4 -6 -2 4 -6

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(3\cdot(-2)-1\cdot(-6);1\cdot 4-(-2)(-2);(-2)(-6)-3\cdot 4)=(0;0;0)$

V příkladu c) vyšel nulový vektor, protože platí: $\boldsymbol{b}=(-2)\boldsymbol{a}$ $\Rightarrow$ násobíme dva vektory, které leží na jedné přímce.

Př. 2: Zapiš všechny vektory, kterou jsou kolmé zároveň na vektor $\boldsymbol{u}=(2;0;1)$ a $\boldsymbol{v}=(-1;1;5)$.

2 0 1 2 0

-1 1 5 -1 1

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(0\cdot 5-1\cdot 1;1\cdot(-1)-5\cdot 2;2\cdot 1-(-1)\cdot 0)=(-1;-11;2)$

Podmínku splňují i všechny další vektory, které jsou s vektorem $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ rovnoběžné.

$\Rightarrow$ řešením jsou všechny vektory $k(-1;-11;2)$, kde $k\in R-\{0\}$.

Př. 3: Najdi vektor $\boldsymbol{c}$ tak, aby byl kolmý na vektory $\boldsymbol{a}=(1;0;1)$ a $\boldsymbol{b}=(1;2;2)$ a platilo $|\boldsymbol{c}|=6$.

Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ je rovnoběžný s vektorovým součinem těchto vektorů $\Rightarrow$ spočtu vektorový součin a pak ho vynásobím vhodným číslem, aby měl požadovanou velikost.

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(0\cdot 2-2\cdot 1;1\cdot 1-2\cdot 1;1\cdot 2-1\cdot 0)=(-2;-1;2)$

$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=3$

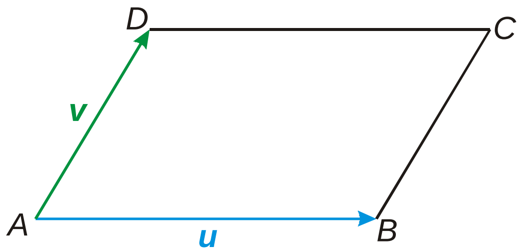
$\Rightarrow$

- $\boldsymbol{c}_1=2\cdot\boldsymbol{u}\Rightarrow$ $\boldsymbol{c}_1=2(-2;-1;2)=(-4;-2;4)$
- $\boldsymbol{c}_2=(-2)\cdot\boldsymbol{u}\Rightarrow$ $\boldsymbol{c}_2=(-2)(-2;-1;2)=(4;2;-4)$

Pedagogická poznámka: Hodinu řídím tak, aby se na následujícím příkladu synchronizovala třída tak 15 minut před koncem hodiny.

Př. 4: Urči obsah rovnoběžníku *ABCD* pokud platí: $A[-1;-2;1]$, $B[2;0;2]$, $C[1;1;-1]$.

Obsah rovnoběžníku *ABCD* můžeme určit jako velikost vektorového součinu vektorů, které je možné umístit na jeho sousední strany (víme z minulé hodiny. Jde o geometrický význam velikost vektorového součinu $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin\alpha$).



Nejdříve určíme souřadnice vektorů:

$\boldsymbol{u} = B - A = (3;2;1)$

$\boldsymbol{v} = C - B = (-1;1;-3)$ souřadnice bodu *D* neznáme, nemůžeme ho určit jako $D - A$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (2\cdot(-3) - 1\cdot 1; 1\cdot(-1) - (-3)\cdot 3; 3\cdot 1 - (-1)\cdot 2) = (-7;8;5)$

Velikost vektoru $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{(-7)^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{138} \doteq 11,75$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají tendenci určovat plochu z obrácené strany rovnosti $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin\alpha$, tedy určením velikostí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a úhlu α.

Př. 5: Urči obsah trojúhelníku *ABC* pokud platí: $A[-2;-2]$, $B[3;-1]$, $C[1;4]$

Dva problémy:

- vektorový součin určuje obsah rovnoběžníku, pro trojúhelník platí: $S = \frac{bc\sin\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ spočteme vektorový součin a jeho velikost vydělíme dvěma.
- vektorový součin je určen pouze pro vektory v prostoru, příklad je však zadán v rovině (spočítat jít musí, protože smysl má) $\Rightarrow$ přidáme k souřadnicím bodů třetí souřadnici (vždy stejnou, nejlépe nulovou).

Body v prostoru: $A[-2;-2;0]$, $B[3;-1;0]$, $C[1;4;0]$

Vektory: $\boldsymbol{b} = B - A = (5;1;0)$, $\boldsymbol{c} = C - A = (3;6;0)$

Vektorový součin: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (1\cdot 0 - 6\cdot 0; 0\cdot 3 - 0\cdot 5; 5\cdot 6 - 3\cdot 1) = (0;0;27)$

Velikost vektorového součinu: $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 27^2} = 27$

Obsah trojúhelníku: $S = \frac{|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$.

Trojúhelník má obsah 13,5.

Př. 6: Petáková:
strana 103/cvičení 46 b)
strana 103/cvičení 47 a)
strana 103/cvičení 48 c)
strana 103/cvičení 50

strana 103/cvičení 51
strana 103/cvičení 53

Shrnutí: