7.2.12 Vektorový součin I

Př. 1: Rozhodni zda následující definice může být použita jako definice vektorového součinu dvou vektorů:
Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce je nulový vektor.
Vektorový součin dvou vektorů ***u***, ***v***, které neleží na jedné přímce, je vektor ***w***, který má tyto vlastnosti:
Vektor ***w*** je kolmý k oběma vektorům ***u***, ***v***.
Platí: $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$, kde α je úhel vektorů ***u*** a ***v***
Vektorový součin ***w*** vektorů ***u*** a ***v*** značíme $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, tedy $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$

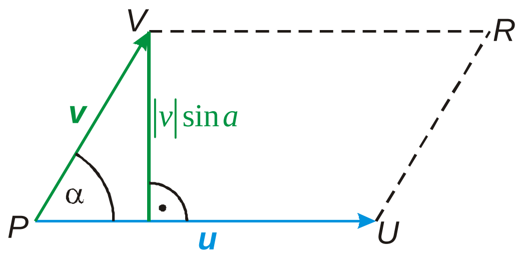
Předchozí definice není správná. Vektor ***w*** podle ní není určen jednoznačně.
Upozornění: Existují dva způsoby násobení vektorů:
- Skalární součin (výsledek číslo) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$
- Vektorový součin (výsledek vektor) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$

Př. 2: Rozhodni zda je vektorové násobení komutativní.

Pro každé vektory ***u***, ***v*** platí $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

Př. 3: Navrhni důvod, proč je vektorovým součinem vektorů ležících na jedné přímce nulový vektor.

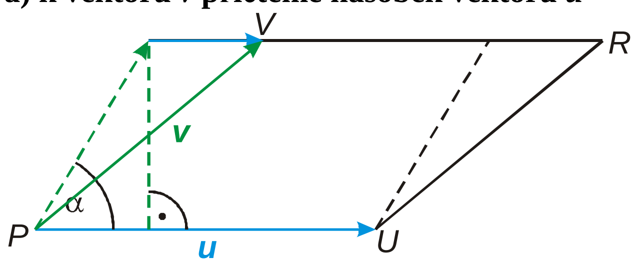
Směrů kolmých k jedné přímce je v prostoru nekonečně mnoho $\Rightarrow$ vektorový součin by nebyl jednoznačně určitelný.
Pro vektory na jedné přímce platí: $\alpha = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin 0 = 0$



Geometrický význam: součin $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$ udává obsah rovnoběžníku *PURV*.

Př. 4: Pomocí geometrického významu čísla $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha$ rozhodni, jak se změní vektorový součin pokud:
a) k vektoru ***v*** přičteme násobek vektoru ***u***
b) pokud jeden z vektorů vynásobíme reálným číslem *k*.

a) k vektoru *v* přičteme násobek vektoru *u*



Rovnoběžník se přičtením násobku nakloní, ale jeho obsah zůstane stejný.
b) pokud jeden z vektorů vynásobíme reálným číslem *k*.
Ve všech případech platí, že vektorový součin se vynásobí číslem *k*.

Př. 5: Doplň větu. Pro každé vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ a pro každé číslo $t \in R$ platí:

a) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) =$ b) $\boldsymbol{a} \times (t\boldsymbol{b}) = .$

Př. 6: Nakresli obrázek kartézské soustavy souřadnic $Oxyz$ a vyznač do ní vektory $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{e}_3$.

Př. 7: Urči vektorové součiny:

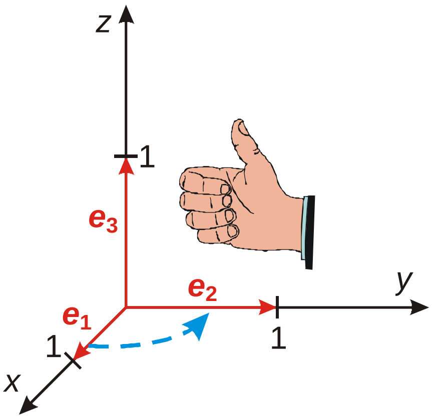
$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 =$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 =$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 =$

$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 =$ $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 =$ $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 =$

$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 =$ $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 =$ $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = .$

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$: dva různoběžné vektory $\Rightarrow$ jejich vektorový součin je nenulový

- velikost: $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\alpha = |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\sin 90° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $\Rightarrow$ půjde opět o jednotkový vektor



- směr: vektory $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{w}$ tvoří pravotočivou bázi:
  vektor $\boldsymbol{w}$ má stejný směr jako osa z $\Rightarrow$ hledaným vektorem je vektor $\boldsymbol{e}_3$ (má jednotkovou velikost a směr osy z) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$ $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$

$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$ $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{o}.$

Teď oba vektory vynásobíme a použijeme pravidla na roznásobení:

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) = a_1\boldsymbol{e}_1 \times b_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 \times b_1\boldsymbol{e}_1 + a_3\boldsymbol{e}_3 \times b_1\boldsymbol{e}_1$

$a_1\boldsymbol{e}_1 \times b_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_2 \times b_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \times b_2\boldsymbol{e}_2 + a_1\boldsymbol{e}_1 \times b_3\boldsymbol{e}_3 + a_2\boldsymbol{e}_2 \times b_3\boldsymbol{e}_3 + a_3\boldsymbol{e}_3 \times b_3\boldsymbol{e}_3$

přerovnáme pořadí čísel a vektorů v součinech:

$a_1b_1(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1) + a_2b_1(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1) + a_3b_1(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)$

$a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2) + a_3b_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2)$

$a_1b_3(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + a_3b_3(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3) =$

spočítáme vektorové součiny v závorkách (podle tabulky výše)

$a_1b_1\boldsymbol{o} + a_2b_1(-\boldsymbol{e}_3) + a_3b_1\boldsymbol{e}_2$

$a_1b_2\boldsymbol{e}_3 + a_2b_2\boldsymbol{o} + a_3b_2(-\boldsymbol{e}_1)$

$a_1b_3(-\boldsymbol{e}_2) + a_2b_3\boldsymbol{e}_1 + a_3b_3\boldsymbol{o}$

Dáme k sobě násobky stejných vektorů:

$(a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3$

Teď už můžeme snadno určit souřadnice vektoru $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$

Př. 8: Vzorec pro výpočet vektorového součinu ze souřadnic je velmi složitý. Zkus najít mnemotechnickou pomůcku pro jeho zapamatování.