

7.2.10 Skalární součin IV

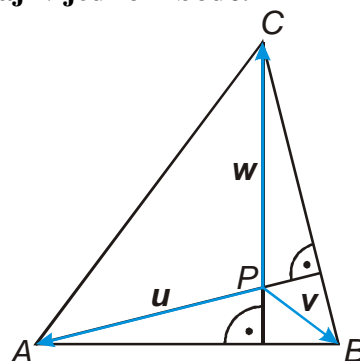
Dokážeme, že výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Označíme si průsečík výšek v_a a v_c jako bod

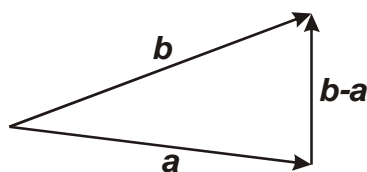
P .

Získáme tak vektory $u = A - P$, $v = B - P$ a

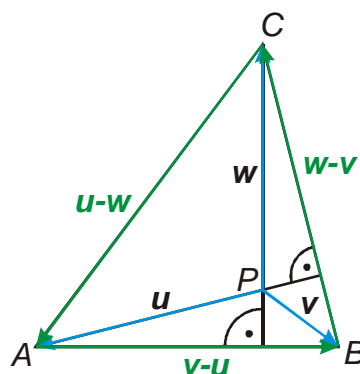
$w = C - P$.



Př. 1: Urči pomocí vektorů u, v, w vektory: $A - C$, $B - A$ a $C - B$.



Analogicky platí: $A - C = u - w$,
 $B - A = v - u$ a $C - B = w - v$.



Přímky PA a PC jsou výšky v trojúhelníku ABC proto platí:

- PA je kolmá na $BC \Rightarrow u(w - v) = 0 \Rightarrow uw - uv = 0$
- PC je kolmá na $AB \Rightarrow w(v - u) = 0 \Rightarrow wv - wu = 0$

Dokazujeme: PB je kolmá na AC . Trik: Sečteme rovnosti: $uw - uv = 0$ a $wv - wu = 0$:

$$uw - uv + wv - wu = 0 \quad wv - uv = 0$$

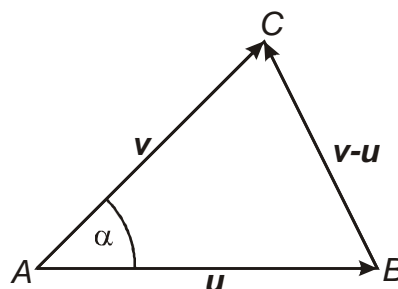
$v(w - u) = 0 \Rightarrow PB$ je kolmá na $AC \Rightarrow$ bod P je i průsečíkem výšky v_b s výškami v_a a v_c .

Vektorové odvození kosinové věty:

V trojúhelníku ABC si označíme:

- $C - A = v$
- $B - A = u$

platí tedy i $C - B = v - u$.



Vyjáďříme si druhou mocninu vektoru $C - B$: $|v - u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2uv$ (tuto rovnost jsme používali při důkazu vzorce pro skalární součin).

skalární součin: $uv = |u||v|\cos\alpha \Rightarrow |v - u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2uv = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\alpha$

Věta je dokázána, přehlednější bude důkaz, když velikosti vektorů napíšeme jako velikosti stran:

$$|v - u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\alpha$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cos\alpha$$

Pomocí vektorů se řeší i fyzikální příklady z praxe:

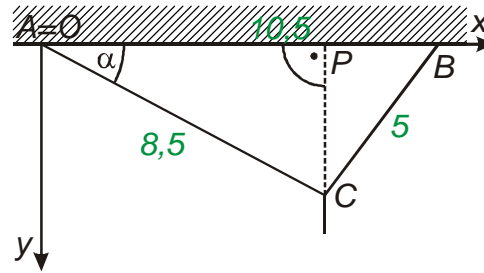
Na stropě tovární haly jsou zabudovány dva háky ve vzdálenosti 10,5 m od sebe. Na jednom z háků je zavěšeno lano dlouhé 8,5 m, na druhém lano dlouhé 5m. Volné konce obou lan jsou spojeny a v tomto místě je zavěšena kladka. Jakou maximální hmotnost může mít předmět zavěšený na kladku, pokud mají obě lana nosnost 10 t?

Př. 2: Nakresli schématický náčrtek situace. Bod, ve kterém je zavěšeno delší lano označ A , bod zavěšení druhého lana B , bod ve kterém jsou lana spojena označ C . Navrhni umístění souřadné soustavy, které by ulehčilo následující výpočet.

Př. 3: Urči souřadnice bodů A, B, C .

$A[0;0]$ - bod je shodný s počátkem soustavy souřadnic

$B[10,5;0]$ - bod leží na ose x , 10,5 m od bodu A (a tedy i od počátku)



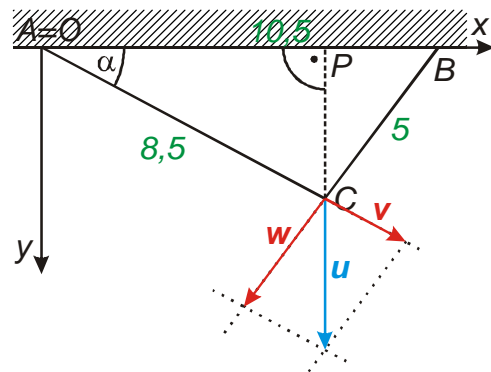
Určíme úhel α pomocí kosinové věty:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8,5^2 + 10,5^2 - 5^2}{2 \cdot 8,5 \cdot 10,5} = 0,49 \Rightarrow \alpha = 28^\circ 4'$$

- $\cos \alpha = \frac{|AP|}{|AC|} \Rightarrow |AP| = |AC| \cos \alpha = 8,5 \cdot \cos 28^\circ 4' = 7,5$

- $\sin \alpha = \frac{|CP|}{|AC|} \Rightarrow |CP| = |AC| \sin \alpha = 8,5 \cdot \sin 28^\circ 4' = 4$

$$\Rightarrow C[7,5;4]$$



$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

vektor \mathbf{u} je součtem vektorů \mathbf{v} a \mathbf{w}

$$\mathbf{v} = k(\mathbf{C} - \mathbf{A})$$

vektor \mathbf{v} je rovnoběžný s vektorem $\mathbf{C} - \mathbf{A}$

$$\mathbf{w} = l(\mathbf{C} - \mathbf{B})$$

vektor \mathbf{w} je rovnoběžný s vektorem $\mathbf{C} - \mathbf{B}$

Př. 4: Urči souřadnice vektorů $\mathbf{C} - \mathbf{A}$, $\mathbf{C} - \mathbf{B}$ a \mathbf{u} .

$$\mathbf{C} - \mathbf{A} = (7,5;4) \quad \mathbf{C} - \mathbf{B} = (-3;4) \quad \mathbf{u} = (0;x) \quad x \text{ je maximální hmotnost}$$

$$\text{Dosadíme do rovnice } \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{u} = k(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + l(\mathbf{C} - \mathbf{B})$$

$$\text{Dosadíme souřadnice: } (0;x) = k(7,5;4) + l(-3;4) \quad \text{Získáváme soustavu: } \begin{cases} 7,5k - 3l = 0 \\ 4k + 4l = x \end{cases}$$

$$\text{Z první rovnice dosadíme do druhé: } k = \frac{6}{15}l \Rightarrow 4 \cdot \frac{6}{15}l + 4l = x \quad \frac{28}{5}l = x$$

$$l = \frac{5x}{28} \quad k = \frac{6}{15} \cdot \frac{5x}{28} = \frac{x}{14}$$

Určíme velikosti vektorů \mathbf{v} a \mathbf{w} :

$$|\mathbf{v}| = |k| |\mathbf{C} - \mathbf{A}| = \frac{x}{14} \cdot 8,5 = \frac{17}{28}x \quad |\mathbf{w}| = |l| |\mathbf{C} - \mathbf{B}| = \frac{5x}{28} \cdot 5 = \frac{25}{28}x$$

Nosnost obou lan je 10 tun \Rightarrow

$$|\mathbf{v}| = \frac{17}{28}x \leq 10 \Rightarrow x \leq 16,5 \quad |\mathbf{w}| = \frac{25}{28}x \leq 10 \Rightarrow x \leq 11,2$$

\Rightarrow hmotnost předmětu musí vyhovovat přísnější podmínce \Rightarrow na kladku je možné zavěsit maximálně 11,2 tuny.