7.2.9 Skalární součin III

Př. 1: Najdi vektor $\boldsymbol{v}$ kolmý na vektor $\boldsymbol{u}=(3;1)$ takový, aby platilo $|\boldsymbol{v}|=2\sqrt{5}$.

a) „konstrukční“ řešení
si určíme směr kolmý na vektor $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{u}=(3;1) \Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{w}=(-1;3)$ je kolmý, platí $\boldsymbol{v}=k\cdot\boldsymbol{w}$.

Teď zajistíme správnou velikost: $|\boldsymbol{w}|=\sqrt{w_1^2+w_2^2}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\boldsymbol{v}=k\cdot\boldsymbol{w}=\sqrt{2}(-1;3)=\left(-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$ nebo $\boldsymbol{v}=k\cdot\boldsymbol{w}=-\sqrt{2}(-1;3)=\left(\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right)$

b) „analytické“ řešení
hledaný vektor: $\boldsymbol{v}=(v_1;v_2)$

1. podmínka – kolmost vektorů: $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(3;1)\cdot(v_1;v_2)=3v_1+1\cdot v_2=0$

2. podmínka – velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ **:** $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=2\sqrt{5}$

$3v_1+1\cdot v_2=0$

$\sqrt{v_1^2+v_2^2}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{v_1^2+(-3v_1)^2}=2\sqrt{5} \quad /^2$

$10v_1^2=20 \qquad v_1^2=2 \Rightarrow v_1=\pm\sqrt{2}$

Dvě řešení: $\boldsymbol{v}=\left(-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$, $\boldsymbol{w}=\left(\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right)$

Př. 2: Je dán vektor $\boldsymbol{u}=\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$. Urči vektor $\boldsymbol{v}$ tak, aby s vektorem $\boldsymbol{u}$ svíral úhel $45°$ a jeho velikost byla 2. Správnost řešení potvrď obrázkem.

1. podmínka: velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ je 2 $\Rightarrow$ $|v|=\sqrt{x^2+y^2}=2$

2. podmínka: úhel vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je $45° \Rightarrow \cos 45°=\dfrac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$

Spočteme velikosti vektoru: $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$: $\cos 45°=\dfrac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)(x;y)}{2\cdot 2} \quad /\cdot 4 \qquad 2\sqrt{2}=x\sqrt{2}-y\sqrt{2} \quad /:\sqrt{2}$

$2=x-y \Rightarrow x=y+2$ Dosadíme do první rovnice: $\sqrt{x^2+y^2}=2 \quad /^2$

$x^2+y^2=4 \qquad (y+2)^2+y^2=4$

$y^2+4y+4+y^2=4 \qquad 2y^2+4y=0 \quad /:2 \qquad y(y+2)=0$

$y_1=0 \Rightarrow x_1=y_1+2=2 \qquad y_2=-2 \Rightarrow x_2=y_2+2=0$

Úloha má dvě řešení $\boldsymbol{v}_1=(2;0)$ a $\boldsymbol{v}_2=(0;-2)$.

Př. 3: Jsou dány body $A[-4;-1]$, $B[2;1]$. Najdi bod C tak, aby zároveň platilo:

a) vektory $C-A$ a $C-B$ jsou navzájem kolmé
b) vektory $C-A$ a $C-B$ mají stejnou velikost

Hledáme souřadnice bodu $C[x;y]$ $\Rightarrow$ dvě neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice (ze dvou podmínek to bude jednoduché)
Určujeme souřadnice bodu *C*, ale podmínky se týkají vektorů ***AC*** a ***BC*** $\Rightarrow$ určíme tyto vektory: $C-A=(x+4;y+1)$ $\qquad$ $C-B=(x-2;y-1)$

1. podmínka: vektory $C-A$ a $C-B$ jsou navzájem kolmé $\Rightarrow$ skalární součin musí být nulový

$$(x+4;y+1)(x-2;y-1)=(x+4)(x-2)+(y+1)(y-1)=0$$
$$x^2-2x+4x-8+y^2-1=0$$
$$x^2+y^2+2x-9=0$$

2. podmínka: vektory $C-A$ a $C-B$ mají stejnou velikost

$$|C-A|=|C-B|$$
$$\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \quad /^2$$
$$x^2+8x+16+y^2+2y+1=x^2-4x+4+y^2-2y+1$$
$$12x+4y=-12$$
$$y=-3-3x$$

Dosadíme do první rovnice:

$$x^2+(-3-3x)^2+2x-9=0$$
$$x^2+9+18x+9x^2+2x-9=0$$
$$10x^2+20x=0$$
$$x(x+2)=0$$
$$x_1=0 \Rightarrow y_1=-3$$
$$x_2=-2 \Rightarrow y_2=3$$

Existují dva body, které splňují zadání příkladu: $C_1[0;-3]$ a $C_2[-2;3]$.

Pedagogická poznámka: Stejně jako u obou předchozích příkladů jde hlavně o konkrétní dosazování do rovnic, které reprezentují podmínky. Vzhledem k tomu, že souřadnice vektorů jsou poměrně „složité“ dělají studenti hodně chyb tím, že se podvědomě snaží vyrobit jednodušší výrazy.

Shrnutí: Při řešení „analytickou“ metodou postupujeme ve třech krocích:
1. zavedeme si neznámé (většinou souřadnice bodu nebo vektoru)
2. podmínky ze zadání přepíšeme pomocí zavedených neznámých do rovnic
3. soustavu rovnic vyřešíme

Př. 4: Petáková:
strana 101/cvičení 29 b)
strana 102/cvičení 35
strana 102/cvičení 38
strana 102/cvičení 40
strana 101/cvičení 42 c)
strana 101/cvičení 43