

7.2.8 Skalární součin II

Př. 1: Najdi alespoň dva vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1; 5)$.

- $\mathbf{v} = (5; -1)$, protože $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = 0$
- $\mathbf{w} = (-5; 1)$, protože $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 = 0$

Př. 2: Najdi obecný postup, jak určit souřadnice vektoru v rovině, který je kolmý na vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$.

Př. 3: Najdi všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3)$. Výsledek ověř pomocí skalárního součinu.

Ověření: $(-2; 3) \cdot (3k; 2k) = (-2) \cdot 3k + 3 \cdot 2k = -6k + 6k = 0$

Př. 4: Najdi vektor kolmý na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3; 4)$. Správnost výsledku ověř pomocí skalárního součinu.

$$\mathbf{v} = (25; 3; x) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2; 3; 4) \cdot (25; 3; x) = -2 \cdot 25 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot x = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2; 3; 4) \cdot (2; 0; x) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot x = 0 \quad x = 1 \Rightarrow \mathbf{v} = (2; 0; 1)$$

$$\mathbf{v} = (3; 2; 0) \quad \text{Ověření: } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2; 3; 4) \cdot (3; 2; 0) = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

Př. 5: Doplň následující pravidla pro skalární součin.

Pro každé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo c platí:

$$\text{a) } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \quad \quad \quad \text{b) } (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \quad \quad \quad \text{c) } \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = .$$

Alespoň dva vztahy dokaž pro vektory v rovině vypočítáním obou stran rovnosti.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad u_1 v_1 + u_2 v_2 = v_1 u_1 + v_2 u_2 ,$$

$$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad \text{levá strana: } (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (cu_1; cu_2) \cdot (v_1; v_2) = cu_1 v_1 + cu_2 v_2$$

$$\text{pravá strana: } c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c(u_1 v_1 + u_2 v_2) = cu_1 v_1 + cu_2 v_2$$

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{levá strana: } \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (w_1; w_2) \cdot (u_1 + v_1; u_2 + v_2) = w_1(u_1 + v_1) + w_2(u_2 + v_2)$$

$$\text{pravá strana: } \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (w_1; w_2) \cdot (u_1; u_2) + (w_1; w_2) \cdot (v_1; v_2) = w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_1 v_1 + w_2 v_2$$

Př. 6: Vypočti:

$$\text{a) } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})$$

$$\text{b) } (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2$$

$$\text{c) } (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2$$

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2$$

$$2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2$$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2)$ - to jsme potřebovali, skalární součin je vyjádřen pomocí velikostí

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \Rightarrow$ můžeme snadno spočítat úhel, který svírají dva vektory.

Př. 7: Urči úhel, který svírají dvojice vektorů z příkladu 2 z minulé hodiny, a porovnej výsledky s nakreslenými obrázky:

a) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (3;4)$

b) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (0;5)$

a) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (3;4)$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 16^\circ 16'$$

b) $\mathbf{u} = (4;3)$, $\mathbf{v} = (0;5)$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{15}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 53^\circ 8'$$

Př. 8: Je dán trojúhelník ABC , $A[1; -2; 3]$, $B[4; 5; 2]$ a $C[-3; -2; -2]$. Urči vnitřní úhly.

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (3; 7; -1) \Rightarrow |\mathbf{B} - \mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{59}$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{A} = (-4; 0; -5) \Rightarrow |\mathbf{C} - \mathbf{A}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{(3; 7; -1)(-4; 0; -5)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{-12 + 5}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = -0,142 \Rightarrow \alpha = 98^\circ 11'$$

β pomocí vektorů $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ a $\mathbf{C} - \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (-3; -7; 1) \Rightarrow |\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{59}$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{B} = (-7; -7; -4) \Rightarrow |\mathbf{C} - \mathbf{B}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{114}$$

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{(-3; -7; 1)(-7; -7; -4)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = \frac{21 + 49 - 4}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = 0,805 \Rightarrow \beta = 36^\circ 25'$$

γ pomocí vektorů $\mathbf{A} - \mathbf{C}$ a $\mathbf{B} - \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (4; 0; 5) \Rightarrow |\mathbf{A} - \mathbf{C}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{C} = (7; 7; 4) \Rightarrow |\mathbf{B} - \mathbf{C}| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{114}$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{(4; 0; 5)(7; 7; 4)}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = \frac{28 + 0 + 20}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = 0,702 \Rightarrow \gamma = 45^\circ 24'$$

Rozhodně rychlejší výpočet než pomocí kosinové věty.

Př. 9: Petáková:

strana 101/cvičení 25 c) d)

strana 101/cvičení 26 c)

strana 101/cvičení 31 c)

strana 102/cvičení 32