## 7.2.8 Skalární součin II

**Př. 1:** Najdi alespoň dva vektory kolmé na vektor $\boldsymbol{u}=(1;5)$.

- $\boldsymbol{v}=(5;-1)$, protože $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=1\cdot 5+5\cdot(-1)=0$
- $\boldsymbol{w}=(-5;1)$, protože $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}=1\cdot(-5)+5\cdot 1=0$

**Př. 2:** Najdi obecný postup, jak určit souřadnice vektoru v rovině, který je kolmý na vektor $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2)$.

**Př. 3:** Najdi všechny vektory kolmé na vektor $\boldsymbol{u}=(-2;3)$. Výsledek ověř pomocí skalárního součinu.

Ověření: $(-2;3)\cdot(3k;2k)=(-2)\cdot 3k+3\cdot 2k=-6k+6k=0$

**Př. 4:** Najdi vektor kolmý na vektor $\boldsymbol{u}=(-2;3;4)$. Správnost výsledku ověř pomocí skalárního součinu.

$\boldsymbol{v}=(25;3;x)$ $\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)(25;3;x)=-2\cdot 25+3\cdot 3+4\cdot x=0$

$\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)(2;0;x)=-2\cdot 2+3\cdot 0+4\cdot x=0$ $x=1$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}=(2;0;1)$

$\boldsymbol{v}=(3;2;0)$ Ověření: $\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)(3;2;0)=-2\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 0=0$

**Př. 5:** Doplň následující pravidla pro skalární součin.
Pro každé vektory ***u***, ***v***, ***w*** (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo *c* platí:
a) $\boldsymbol{uv}=$ b) $(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}=$ c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=$.
Alespoň dva vztahy dokaž pro vektory v rovině vypočítáním obou stran rovnosti.

$\boldsymbol{uv}=\boldsymbol{vu}$ $u_1v_1+u_2v_2=v_1u_1+v_2u_2$,

$(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}=c(\boldsymbol{uv})$ levá strana: $(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}=(cu_1;cu_2)(v_1;v_2)=cu_1v_1+cu_2v_2$

pravá strana: $c(\boldsymbol{uv})=c(u_1v_1+u_2v_2)=cu_1v_1+cu_2v_2$

$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{wu}+\boldsymbol{wv}$

levá strana: $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=(w_1;w_2)(u_1+v_1;u_2+v_2)=w_1(u_1+v_1)+w_2(u_2+v_2)$

pravá strana: $\boldsymbol{wu}+\boldsymbol{wv}=(w_1;w_2)(u_1;u_2)+(w_1;w_2)(v_1;v_2)=w_1u_1+w_2u_2+w_1v_1+w_2v_2$

**Př. 6:** Vypočti:
a) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$ b) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2$ c) $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2$

$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2=\boldsymbol{u}^2-2\boldsymbol{uv}+\boldsymbol{v}^2$ $2\boldsymbol{uv}=\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{v}^2-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2$

$\boldsymbol{uv}=\frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\right)$ - to jsme potřebovali, skalární součin je vyjádřen pomocí velikostí

$\boldsymbol{uv}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ $\Rightarrow$ můžeme snadno spočítat úhel, který svírají dva vektory.

**Př. 7:** Urči úhel, který svírají dvojice vektorů z příkladu 2 z minulé hodiny, a porovnej výsledky s nakreslenými obrázky:

a) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (3;4)$ b) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (0;5)$

a) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (3;4)$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$ $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 16°16'$

b) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (0;5)$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$ $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{15}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 53°8'$

**Př. 8:** Je dán trojúhelník *ABC*, $A[1;-2;3]$, $B[4;5;2]$ a $C[-3;-2;-2]$. Urči vnitřní úhly.

$B - A = (3;7;-1) \Rightarrow |B - A| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{59}$

$C - A = (-4;0;-5) \Rightarrow |C - A| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{(3;7;-1)(-4;0;-5)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{-12 + 5}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = -0{,}142 \Rightarrow \alpha = 98°11'$

$\beta$ pomocí vektorů $A - B$ a $C - B$:

$A - B = (-3;-7;1) \Rightarrow |B - A| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{59}$

$C - B = (-7;-7;-4) \Rightarrow |C - B| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{114}$

$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{(-3;-7;1)(-7;-7;-4)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = \frac{21 + 49 - 4}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = 0{,}805 \Rightarrow \beta = 36°25'$

$\gamma$ pomocí vektorů $A - C$ a $B - C$:

$A - C = (4;0;5) \Rightarrow |A - C| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

$B - C = (7;7;4) \Rightarrow |B - C| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{114}$

$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{(4;0;5)(7;7;4)}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = \frac{28 + 0 + 20}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = 0{,}702 \Rightarrow \gamma = 45°24'$

Rozhodně rychlejší výpočet než pomocí kosinové věty.

**Př. 9:** Petáková:
strana 101/cvičení 25 c) d)
strana 101/cvičení 26 c)
strana 101/cvičení 31 c)
strana 102/cvičení 32