

7.2.8 Skalární součin II

Předpoklady: 7207

Teď už se můžeme věnovat řešení příkladů, které využívají skalární součin a jeho vlastnosti.

Př. 1: Najdi alespoň dva vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1; 5)$.

Kolmých vektorů je nekonečně mnoho. Že je vektor kolmý na vektor \mathbf{u} poznáme pomocí skalárního součinu: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Jde například o tyto vektory:

- $\mathbf{v} = (5; -1)$, protože $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = 0$
- $\mathbf{w} = (-5; 1)$, protože $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 = 0$
- a spousta dalších možností

Př. 2: Najdi obecný postup, jak určit souřadnice vektoru v rovině, který je kolmý na vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$.

Skalární součin musí být roven nule $\Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Aby to vyšlo stačí položit $v_1 = u_2$ a $v_2 = -u_1$. Po dosazení $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 u_2 + u_2 (-u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$
Druhá možnost $v_1 = -u_2$ $v_2 = u_1$

Předchozí pravidlo je velmi důležité! Budeme ho časem používat i několikrát v jediné hodině.

Př. 3: Najdi všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3)$. Výsledek ověř pomocí skalárního součinu.

Jedním z kolmých vektorů je vektor $\mathbf{v} = (3; 2)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0$.

Všechny další hledané vektory jsou jeho násobky \Rightarrow na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3)$ jsou kolmé vektory $(3k; 2k)$ $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ověření: $(-2; 3) \cdot (3k; 2k) = (-2) \cdot 3k + 3 \cdot 2k = -6k + 6k = 0$

Př. 4: Najdi vektor kolmý na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3; 4)$. Správnost výsledku ověř pomocí skalárního součinu.

Vektory jsou navzájem kolmé, právě když je jejich skalární součin roven nule \Rightarrow u vektorů v prostoru si můžeme zvolit první dvě souřadnice libovolně a třetí dopočítáme tak, aby skalární součin vyšel nulový.

$$\mathbf{v} = (25; 3; x)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2; 3; 4) \cdot (25; 3; x) = -2 \cdot 25 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot x = 0$$

$$4x = 41$$

$$x = \frac{41}{4} \Rightarrow \mathbf{v} = \left(25; 3; \frac{41}{4} \right)$$

$$\text{Ověření: } \mathbf{uv} = (-2; 3; 4) \left(25; 3; \frac{41}{4} \right) = -2 \cdot 25 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{41}{4} = 0$$

$$\text{Elegantnější řešení: } \mathbf{v} = (2; 0; x)$$

$$\mathbf{uv} = (-2; 3; 4) (2; 0; x) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot x = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \mathbf{v} = (2; 0; 1)$$

$$\text{Ověření: } \mathbf{uv} = (-2; 3; 4) (2; 0; 1) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 0$$

Nejelegantnější řešení:

U jedné souřadnice napíšeme nulu, pro zbývající použijeme pravidlo pro dvojsložkové vektory:

$$\mathbf{v} = (3; 2; 0)$$

$$\text{Ověření: } \mathbf{uv} = (-2; 3; 4) (3; 2; 0) = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

Pedagogická poznámka: Příklad je jednoduchý, ale často působí studentům problémy, podobně jako jiné příklady, ve kterých existuje více řešení. Diskuse o výhodnosti jednotlivých řešení záleží na rychlosti postupu v hodině.

Pedagogická poznámka: Hlavní funkcí ověření u předchozích dvou příkladů je opakování výpočtu skalárního součinu, aby s ním měli studenti menší problémy ke konci hodiny.

Pedagogická poznámka: Další (důkazová) část hodiny většinu studentů příliš neoslovuje. Kdyby měli používat skalární součin při výpočtech, intuitivně by postupovali správně a proto jim rozebírání a důkazy přijdou zbytečné. Snažím se postupovat tak, aby na příklady 7 a 8 zbylo minimálně 15 minut času. Pokud mají někteří studenti problémy s předchozí částí hodiny, důkazy nakousnu pro zbytek třídy a s nimi se vrátím na začátek.

V minulé hodině jsme si odvodili význam skalárního součinu, ale v našem odvození byla nedůslednost. Vypočítali jsme si skalární součin ve speciální soustavě souřadnic \Rightarrow musíme dokázat, že skalární součin na volbě soustavy souřadnic nezávisí, podobně jako na soustavě souřadnic nezávisí velikost vektoru.

Skalární součin má podobné vlastnosti jako jiné druhy součinů.

Př. 5: Doplň následující pravidla pro skalární součin.

Pro každé vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo c platí:

$$\text{a) } \mathbf{uv} = \quad \quad \quad \text{b) } (c\mathbf{u})\mathbf{v} = \quad \quad \quad \text{c) } \mathbf{w}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = .$$

Alespoň dva vztahy dokaž pro vektory v rovině vypočítáním obou stran rovnosti.

Pro každé vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo c platí:

$$\mathbf{uv} = \mathbf{vu}$$

$$(c\mathbf{u})\mathbf{v} = c(\mathbf{uv})$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{wu} + \mathbf{wv} .$$

Důkazy:

$$uv = vu$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2,$$

vztah platí, neboť násobení reálných čísel je komutativní a platí tedy $u_1v_1 = v_1u_1$

$$(cu)v = c(uv)$$

levá strana: $(cu)v = (cu_1; cu_2)(v_1; v_2) = cu_1v_1 + cu_2v_2$

pravá strana: $c(uv) = c(u_1v_1 + u_2v_2) = cu_1v_1 + cu_2v_2$

$$w(u+v) = wu + wv$$

levá strana: $w(u+v) = (w_1; w_2)(u_1+v_1; u_2+v_2) = w_1(u_1+v_1) + w_2(u_2+v_2)$

pravá strana: $wu + wv = (w_1; w_2)(u_1; u_2) + (w_1; w_2)(v_1; v_2) = w_1u_1 + w_2u_2 + w_1v_1 + w_2v_2$

předchozí pravidla nám umožňují roznásobovat skalárním součinem závorky

Př. 6: Vypočti:

a) $(a+b)(c+d)$

b) $(u+v)^2$

c) $(u-v)^2$

Pro každé vektory a, b, c, d platí: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Pro každé vektory u, v platí: $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

Pro každé vektory u, v platí: $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

Poslední vztah můžeme upravit:

$$(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$2uv = u^2 + v^2 - (u-v)^2$$

platí $u^2 = |u|^2$, $v^2 = |v|^2$, $(u-v)^2 = |u-v|^2$, po dosazení a vydělení dvěma získáme:

$$uv = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u-v|^2) - \text{to jsme potřebovali, skalární součin je vyjádřen pomocí velikostí}$$

vektorů, které nezávisí na soustavě souřadnic \Rightarrow skalární součin také nezávisí na volbě soustavy souřadnic \Rightarrow odvození z minulé hodiny bylo zcela v pořádku.

Vzorec pro skalární součin můžeme upravit:

$$uv = |u||v|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{uv}{|u||v|} \Rightarrow \text{můžeme snadno spočítat úhel, který svírají dva vektory.}$$

Př. 7: Urči úhel, který svírají dvojice vektorů z příkladu 2 z minulé hodiny, a porovnej výsledky s nakreslenými obrázky:

a) $u = (4;3)$, $v = (3;4)$

b) $u = (4;3)$, $v = (0;5)$

a) $u = (4;3)$, $v = (3;4)$

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 16^\circ 16'$$

b) $\mathbf{u} = (4; 3)$, $\mathbf{v} = (0; 5)$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

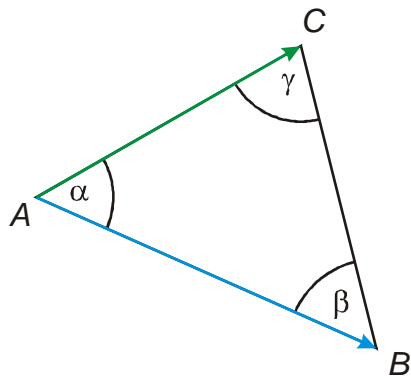
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{15}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 53^\circ 8'$$

Oba výsledky odpovídají obrázkům z minulé hodiny.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde sice o pouhé dosazení do vzorce, ale problémů se objeví dost. Někteří studenti určují pouze polovinu skalárního součinu, jiní mají problémy s velikostmi vektorů.

Př. 8: Je dán trojúhelník ABC , $A[1; -2; 3]$, $B[4; 5; 2]$ a $C[-3; -2; -2]$. Urči vnitřní úhly.



Z obrázku je vidět, že úhel α můžeme určit pomocí skalárního součinu vektorů $B - A$ a $C - A$.

$$B - A = (3; 7; -1) \Rightarrow |B - A| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{59}$$

$$C - A = (-4; 0; -5) \Rightarrow |C - A| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(3; 7; -1)(-4; 0; -5)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{-12 + 5}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = -0,142 \Rightarrow \alpha = 98^\circ 11'$$

β pomocí vektorů $A - B$ a $C - B$:

$$A - B = (-3; -7; 1) \Rightarrow |A - B| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{59}$$

$$C - B = (-7; -7; -4) \Rightarrow |C - B| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{114}$$

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(-3; -7; 1)(-7; -7; -4)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = \frac{21 + 49 - 4}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = 0,805 \Rightarrow \beta = 36^\circ 25'$$

γ pomocí vektorů $A - C$ a $B - C$:

$$A - C = (4; 0; 5) \Rightarrow |A - C| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$B - C = (7; 7; 4) \Rightarrow |B - C| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{114}$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{(4; 0; 5) \cdot (7; 7; 4)}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = \frac{28 + 0 + 20}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = 0,702 \Rightarrow \gamma = 45^\circ 24'$$

Rozhodně rychlejší výpočet než pomocí kosinové věty.

Pedagogická poznámka: Pokud je čas, stojí za to ozkoušet ve vzorci vektor opačný k jednomu z vektorů a diskutovat o tom, jaký úhel vyšel.

Př. 9: Petáková:
strana 101/cvičení 25 c) d)
strana 101/cvičení 26 c)
strana 101/cvičení 31 c)
strana 102/cvičení 32

Shrnutí: Pomocí skalárního součinu snadno nalezneme kolmý vektor – prohozením souřadnic a otočením jednoho znaménka.