7.2.7 Skalární součin I

Vzpomínka: Velikost vektoru $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = (u_1; u_2) \cdot (u_1; u_2) = u_1^2 + u_2^2 = u_1 u_1 + u_2 u_2$

Jak by vypadal vzorec pro součin dvou různých vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$?

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$

$\Rightarrow$ **Velký rozdíl oproti násobení dvou čísel. Vynásobením dvou čísel získáme opět číslo, ale vynásobením dvou vektorů, získáváme číslo, tedy něco úplně jiného.**

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$ v rovině je číslo $u_1 v_1 + u_2 v_2$.
Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Př. 1: Urči skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$:
a) $\boldsymbol{u} = (1; 2; 3)$ a $\boldsymbol{v} = (3; 3; 3)$ b) $\boldsymbol{u} = (1; 2; 3)$ a $\boldsymbol{v} = (3; 3; -3)$

a) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1; 2; 3) \cdot (3; 3; 3) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3 + 6 + 9 = 18$

b) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1; 2; 3) \cdot (3; 3; -3) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) = 3 + 6 - 9 = 0$

Př. 2: U každé z následujících dvojic vektorů vypočti skalární součin a načrtni obrázek. Pro všechny vektory vol umístění v počátku soustavy souřadnic.
a) $\boldsymbol{u} = (4; 3)$, $\boldsymbol{v} = (3; 4)$ b) $\boldsymbol{u} = (4; 3)$, $\boldsymbol{v} = (0; 5)$ c) $\boldsymbol{u} = (4; 3)$, $\boldsymbol{v} = (-3; 4)$

a) $\boldsymbol{u} = (4; 3)$, $\boldsymbol{v} = (3; 4)$
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (4; 3) \cdot (3; 4) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$

b) $\boldsymbol{u} = (4; 3)$, $\boldsymbol{v} = (0; 5)$
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (4; 3) \cdot (0; 5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$

c) $\boldsymbol{u} = (4; 3)$, $\boldsymbol{v} = (-3; 4)$
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (4; 3) \cdot (-3; 4) = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$

Všechny násobené vektory měly stejnou velikost, přesto se jejich skalární násobky liší. $\Rightarrow$ Zřejmě skalární součin kromě velikosti vektorů závisí i na úhlu, který vektory svírají. O úhlu, který svírají vektory jsme ještě nemluvili. Co to vlastně je?

Př. 3: Úhel, který svírají dva vektory je zaveden takto:
"Mají-li dva vektory ***u***, ***v*** umístění ***OU***, ***OV***, nazývá se velikost konvexního úhlu *UOV* úhel φ vektorů ***u***, ***v***. Jsou-li přímky *OU*, *OV* navzájem kolmé, říkáme, že i vektory *OU*, *OV* jsou navzájem kolmé."
Nakresli obrázek zachycující situaci popisovanou v definici. Jakých hodnot může dosáhnout úhel, který svírají dva vektory? Jakých hodnot může dosáhnout odchylka dvou přímek?

pro úhel φ dvou vektorů platí: $0 \le \varphi \le \pi$ pro odchylku α přímek platí: $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

Př. 4: Jsou dány vektory ***u***, ***v*** takové, že platí: $|\boldsymbol{v}| = 2|\boldsymbol{u}|$. Vyznač možnou polohu těchto vektorů pokud pro úhel φ, který svírají platí:

a) $\varphi = 0$ b) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d) $\varphi = \pi$

Př. 5: Jsou dány dva vektory ***u*** (o velikosti $|\boldsymbol{u}|$) a ***v*** (o velikosti $|\boldsymbol{v}|$), které svírají úhel φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$). Urči souřadnice těchto vektorů v kartézské soustavě, jejíž osa *x* je rovnoběžná se směrem vektoru ***u***.
Nakresli náčrtek situace, umístění obou vektorů vol tak, aby jejich počáteční body ležely v počátku soustavy souřadnic. Pomocí velikostí obou vektorů $|\boldsymbol{u}|$, $|\boldsymbol{v}|$ a velikosti úhlu φ vyjádři jejich souřadnice. Poté odvoď vzorec pro význam skalárního součinu.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (|\boldsymbol{u}|; 0) \cdot (|\boldsymbol{v}| \cos\varphi; |\boldsymbol{v}| \sin\varphi) = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi + 0 \cdot |\boldsymbol{v}| \sin\varphi$$

Pro skalární součin dvou vektorů ***u***, ***v*** platí: $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi$

Pedagogická poznámka: Studenti většinou nakreslí obrázek, ale určování souřadnic jim nejde. Souřadnice vektoru ***u*** jim proto ukazuji docela brzo.

Př. 6: Rozhodni, kdy je skalární součin vektorů ***u***, ***v*** roven nule.

ze vzorce $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi$ vyplývá, že skalární součin vektorů je nulový:

- pokud je jeden z vektorů nulový (má nulovou délku)
- pokud jsou na sebe vektory kolmé.

Př. 7: Petáková:
strana 101/cvičení 24