7.2.1 Vektory

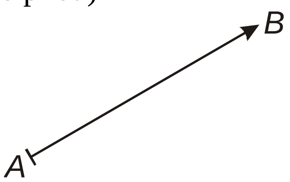
Předpoklady: 7104

Některé fyzikální veličiny (například rychlost, síla) mají dvě charakteristiky:

- velikost
- směr

Jak je znázornit, jedno číslo (jako například pro hmotnost $m = 55\,\text{kg}$) nestačí?

Orientovaná úsečka: úsečka s vyznačeným počátečním a koncovým bodem (označený šipkou)



Na obrázku je orientovaná úsečka ***AB***

- velikost: délka orientované úsečky
- směr: směr orientované úsečky

nulové orientované úsečky – počáteční bod splývá s koncovým $\Rightarrow$ nulová velikost

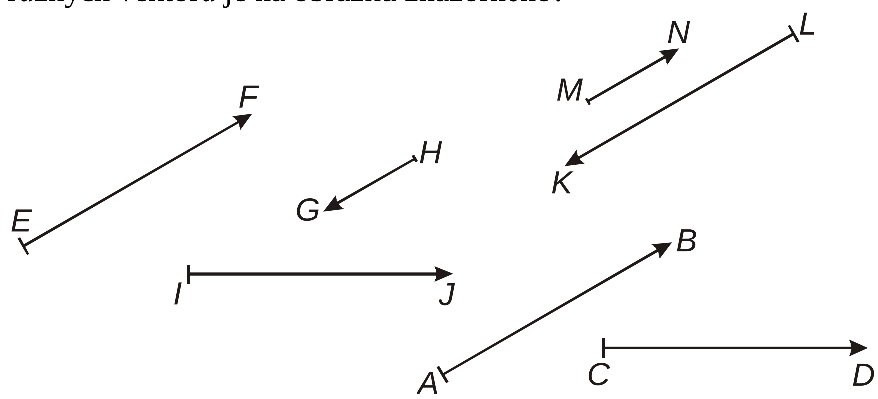
orientovaná úsečka obsahuje víc informací než jenom velikost a směr, určuje i umístění $\Rightarrow$

> **nenulový vektor *u*** je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr
> **nulový vektor** je množina všech nulových úseček

Dodatek: Podobně zavádíme: racionální číslo je množina všech zlomků, které je možné zkrátit do stejného základního tvaru ($\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30} = \frac{-14}{-21}$).

Vektor zapisujeme dvěma způsoby: tučné malé písmeno $\boldsymbol{u}$, nebo malé písmeno se šipkou $\vec{u}$.

Př. 1: Rozhodni, které z orientovaných úseček na obrázku tvoří stejné vektory. Kolik různých vektorů je na obrázku znázorněno?



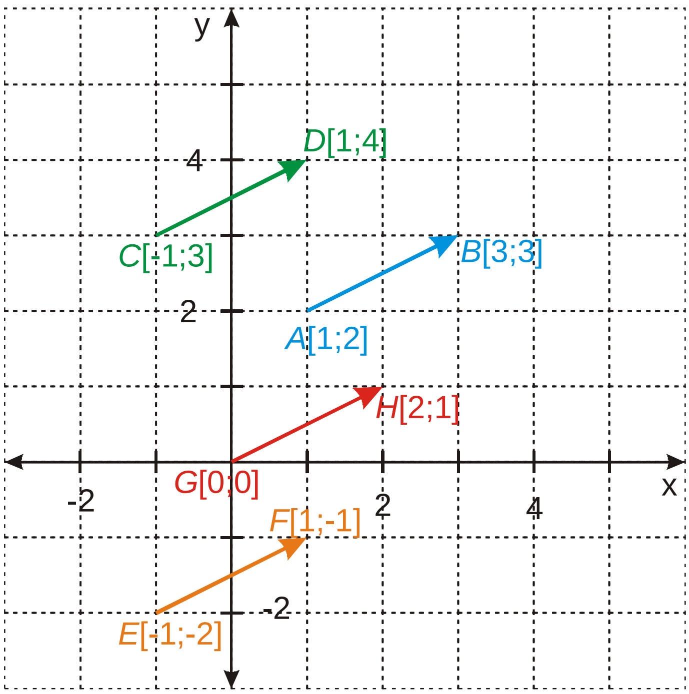
vektor ***u*** – orientované úsečky ***AB***, ***EF***
vektor ***v*** – orientované úsečky ***IJ***, ***CD***

vektor ***w*** – orientovaná úsečka ***LK***
vektor ***x*** – orientovaná úsečka ***HG***
vektor ***y*** – orientovaná úsečka ***MN***
$\Rightarrow$ sedm orientovaných úseček znázorňuje pouze pět různých vektorů

Libovolnou úsečku, která určuje vektor ***u*** nazýváme **umístění vektoru *u*.**
u předchozího příkladu říkáme:

- orientované úsečky ***AB***, ***EF*** jsou umístěním vektoru ***u***
- umístěním vektoru ***x*** je orientovaná úsečka ***HG***
- apod.

Př. 2: V rovině je dán vektor ***u*** orientovanou úsečkou ***AB*** ($A[1;2]$, $B[3;3]$). Zakresli do obrázku umístění vektoru:
a) orientovanou úsečkou ***AB*** b) orientovanou úsečkou ***CD***, pokud $C[-1;3]$
c) orientovanou úsečkou ***EF***, pokud $F[1;-1]$
d) orientovanou úsečkou ***GH***, pokud $G[0;0]$



Př. 3: Rozhodni, kolik čísel je potřeba v rovině k určení:
a) orientované úsečky b) vektoru

Orientovaná úsečka je určena čtyřmi čísly. Dvě čísla určují souřadnice počátečního bodu a dvě čísla určují souřadnice koncového bodu.

Když jsme kreslili obrázek k příkladu 4, všechny umístění vektoru jsme kreslili podle jednoho z krajních bodů tak, aby šipka znamenala posun o dvě pole doprava a jedno pole nahoru.
$\Rightarrow$ **vektor charakterizují v rovině dvě čísla posun ve vodorovném a posun ve svislém směru** $\Rightarrow$ **mohli bychom psát** $\boldsymbol{u} = (2;1)$

Postřeh: Čísla charakterizující vektor ***u*** z předchozího příkladu se shodují se souřadnicemi bodu *H* orientované úsečky *GH* (úsečky, která začíná v počátku soustavy souřadnic).

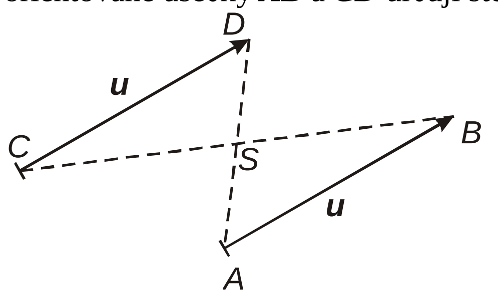
Př. 4: Orientovaná úsečka ***AB*** je dána body $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$. Urči vektor určený touto orientovanou úsečkou.

Vektor charakterizují dvě čísla, která popisují, jak jsme se posunuli z bodu *A* do bodu *B*.
Tento posun odpovídá rozdílům souřadnic $b_1 - a_1$ a $b_2 - a_2$.
Zkusíme zda náš odhad odpovídá realitě z příkladu 4.
orientovaná úsečka ***AB***:

- $b_1 - a_1 = 3 - 1 = 2$ (ve vodorovném směru se pohybujeme o dvě).
- $b_2 - a_2 = 3 - 2 = 1$(ve svislém směru se pohybujeme o jedna).

Zdá se, že vzorce fungují.

Jde náš vzorec odvodit i jinak, více matematicky?
Vezmeme dvě umístění ***AB*** a ***CD*** vektoru ***u*** na dvou různých rovnoběžných přímkách.
Orientované úsečky ***AB*** a ***CD*** jsou stejně dlouhé a navzájem rovnoběžné $\Rightarrow$ čtyřúhelník *ABDC* je rovnoběžník.
Úhlopříčky ve čtyřúhelníku se půlí $\Rightarrow$ úsečky *AD* a *BC* mají společný střed.
Platí i obráceně: úsečky *AD* a *BC* mají společný střed $\Rightarrow$ čtyřúhelník *ABDC* je rovnoběžník a orientované úsečky ***AB*** a ***CD*** určují stejný vektor.



Toto pravidlo platí i v případě, že obě orientované úsečky leží na stejné přímce.
$\Rightarrow$ Orientované úsečky ***AB*** a ***CD*** určují stejný vektor právě tehdy, mají-li úsečky *AD* a *BC* společný střed.

Předchozí větu zapíšeme vzorcem:
$S_{AD} = S_{BC}$
Předeme do jednotlivých souřadnic (zapíšeme rovnou i třetí souřadnici pro případ, že pracujeme v prostoru):

$\frac{a_1+d_1}{2} = \frac{b_1+c_1}{2}$	$\frac{a_2+d_2}{2} = \frac{b_2+c_2}{2}$	$\frac{a_3+d_3}{2} = \frac{b_3+c_3}{2}$
$a_1+d_1 = b_1+c_1$	$a_2+d_2 = b_2+c_2$	$a_3+d_3 = b_3+c_3$
$d_1-c_1 = b_1-a_1$	$d_2-c_2 = b_2-a_2$	$d_3-c_3 = b_3-a_3$

Tyto rozdíly už známe, získali jsme tak čísla, která nám charakterizovala vektor (souřadnice umístění vektoru s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic), říkáme jim **souřadnice vektoru**. Abychom rozlišili souřadnice vektorů a souřadnice bodů, píšeme souřadnice vektorů do kulatých závorek $\boldsymbol{u} = (u_1;u_2) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

Z exaktního odvození je také vidět, že **souřadnice vektoru nezávisí na orientované úsečce, kterou je určen**.

Je-li vektor *u* určen orientovanou úsečkou *AB*, nazývají se čísla $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$ (případně v prostoru ještě $u_3 = b_3 - a_3$) souřadnice vektoru ***u*****.**
Píšeme $\boldsymbol{u} = B - A = (u_1; u_2)$ (případně $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$).

Př. 5: Jsou dány body $A[2;1]; B[4;2]; C[-1;-3]$. Urči vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BC}$ a $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{CA}$.

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (4-2; 2-1) = (2;1)$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BC} = C - B = (-1-4; -3-2) = (-5;-5)$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{CA} = A - C = (2-[-1]; 1-[-3]) = (3;4)$

Př. 6: Jsou dány body $A[-2;3;-7]$ a $B[4;-2;-1]$. Urči vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BA}$. Porovnej výsledky.

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (4-[-2]; -2-3; -1-[-7]) = (6;-5;6)$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BA} = A - B = (-2-4; 3-[-2]; -7-[-1]) = (-6;5;-6)$

Oba vektory mají opačný směr $\Rightarrow$ jejich souřadnice musí být navzájem opačné.

Př. 7: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = (-2;3)$ a dvě jeho umístění $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{KL}$, $A[1;2]$, $L[-1;1]$. Urči souřadnice nezadaných bodů.

Souřadnice bodu $B[b_1; b_2]$.

Platí: $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2) = (-2;3) = B - A = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$. Dosadíme:

- $-2 = b_1 - 1 \Rightarrow b_1 = -2 + 1 = -1$
- $3 = b_2 - 2 \Rightarrow b_2 = 3 + 2 = 5$

$B[-1;5]$

Souřadnice bodu $K[k_1; k_2]$.

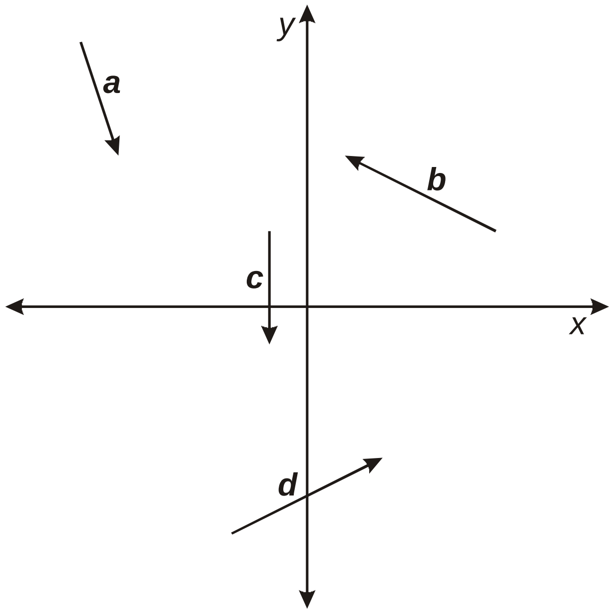
Platí: $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2) = (-2;3) = L - K = (l_1 - k_1; l_2 - k_2)$. Dosadíme:

- $-2 = -1 - k_1 \Rightarrow k_1 = -1 + 2 = 1$
- $3 = 1 - k_2 \Rightarrow k_2 = 1 - 3 = -2$

$K[1;-2]$

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu synchronizuji třídu, tak aby všichni stihli následující příklad. Pokud je čas mohou se pomalejší studenti vrátit k předchozímu příkladu, ti rychlejší pak postupovat dál.

Př. 8: Na obrázku jsou nakresleny vektory se souřadnicemi $(-4;2)$, $(0;-3)$, $(4;2)$ a $(1;-3)$. Přiřaď vektorům jejich souřadnice.



Vektor $\boldsymbol{a}$ má kladnou x-ovou složku a zápornou y-vou složku $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a} = (1;-3)$.

Vektor $\boldsymbol{b}$ má zápornou x-ovou složku a kladnou y-vou složku $\Rightarrow$ $\boldsymbol{b} = (-4;2)$.

Vektor $\boldsymbol{c}$ má nulovou x-ovou složku a zápornou y-vou složku $\Rightarrow$ $\boldsymbol{c} = (0;-3)$.

Vektor $\boldsymbol{d}$ má kladnou x-ovou složku a kladnou y-vou složku $\Rightarrow$ $\boldsymbol{d} = (4;2)$.

Pedagogická poznámka: Snažím se v hodině postupovat tak, abych stihl látku k tomu to místu. Zbytek hodiny by sice logicky patřil na její začátek, ale k pochopení podstaty vektorů není nutný, naopak studenty spíše odvádí od toho důležitého. Navíc stejnou problematikou se učebnice zabývá už v první hodině o posunutí.

Jak poznáme stejnou velikost?
Jasné - spočítáme vzdálenost krajních bodů.

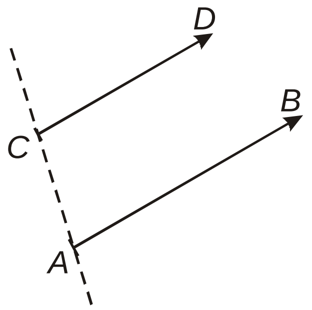
Jak poznáme stejný směr?
Pohledem jednoduché, ale matematicky těžké.

Dvě nenulové orientované úsečky ***AB*** a ***CD*** mají **stejný směr**, jestliže:

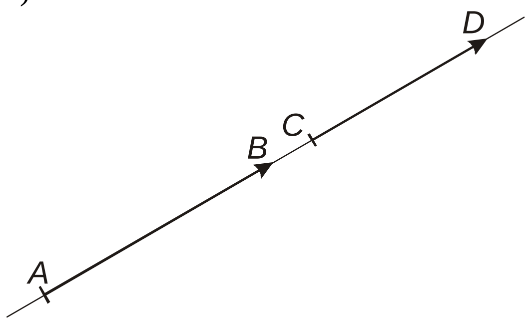
- přímky AB a CD jsou rovnoběžné, různé a body B, D leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC
- přímky AB a CD jsou totožné a průnikem polopřímek AB a CD je opět polopřímka.

Př. 9: Nakresli dvojice orientovaných úseček ***AB*** a ***CD***, tak aby obě orientované úsečky měly různou velikost a splňovaly:
a) první z podmínek pro stejný směr orientovaných úseček
b) druhou z podmínek pro stejný směr orientovaných úseček

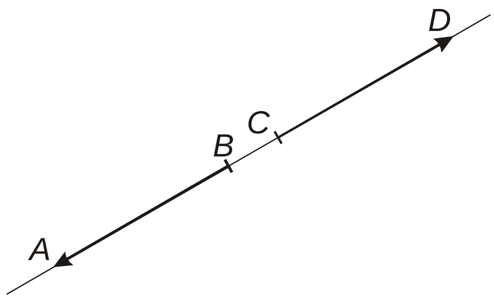
a)



b)



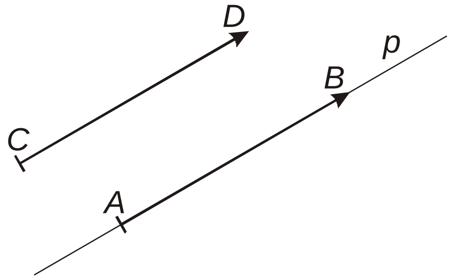
Př. 10: Nakresli dvojici orientovaných úseček ***AB*** a ***CD***, tak aby obě orientované úsečky měly stejnou velikost, přímky *AB* a *CD* byly totožné a průnikem polopřímek *AB* a *CD* nebyla polopřímka. Jak bys nazval jejich směry?



Směry orientovaných úseček bychom mohli nazvat opačné.

Pedagogická poznámka: Předchozí dva příklady slouží hlavně k tomu, aby studenti vůbec vnímali předchozí definici stejného směru. S variantou b) mají podstatně větší problémy. Zajímavé mě přijde, že téměř všichni kreslí situaci tak, aby splynuly body *B* a *C*.

Jestliže vektor ***u*** můžeme určit orientovanou úsečkou ***AB***, která leží na přímce *p*, říkáme, že vektor ***u*** leží na přímce *p*. (spíše to však znamená, že má stejný směr jako přímka, protože ho můžeme určit i orientovanou úsečkou ***CD***, která na přímce neleží).



Nulový vektor leží na každé přímce.

Jakou podmínku musí splňovat vektor $\boldsymbol{u}$, abychom mohli tvrdit, že leží v rovině ρ?
Vektor $\boldsymbol{u}$ můžeme určit orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$, která leží v rovině ρ.

Př. 11: Petáková:
strana 99/cvičení 1 a) b) c)
strana 99/cvičení 2

Shrnutí: Vektor je množinou orientovaných úseček. Zachybuje pouze velikost a směr, ne umístění. Jeho souřadnice získáme rozdílem souřadnic koncových bodů.