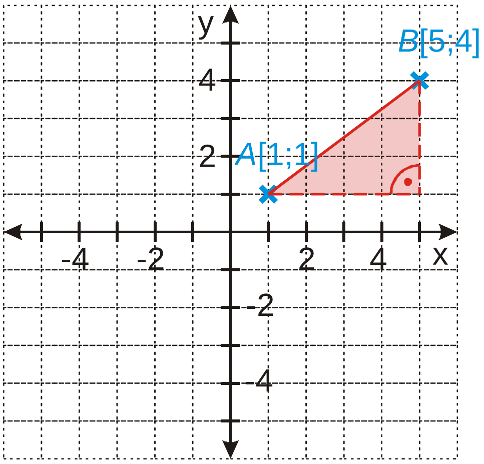
7.1.3 Vzdálenost bodů

Předpoklady: 7102

Př. 1: Urči vzdálenost bodů $A[1;1]$ a $B[5;4]$.



Z obrázku je vidět, že vzdálenost $|AB|$ se rovná délce přepony v pravoúhlém trojúhelníku:
$|AB| = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Jak postupovat obecně bez obrázku, když známe souřadnice bodů $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$?
Musíme určit délky odvěsen:

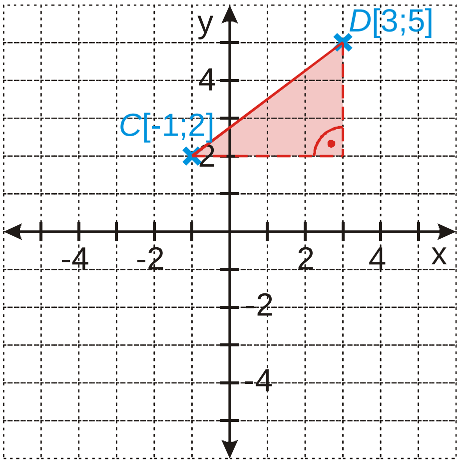
- $4 = 5 - 1 = b_1 - a_1$
- $3 = 4 - 1 = b_2 - a_2$

$\Rightarrow$ vzorec: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Př. 2: Najdi situace, ve kterých by se při prvním pohledu mohlo zdát, že vzorec $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ pro výpočet vzdáleností neplatí, nebo nebude použitelný. Ověř v takových případech jeho platnost.

a) rozdíl $b_1 - a_1$ nemusí být vždy kladný
například pokud bychom prohodili body z příkladu 1
$B[1;1]$, $A[5;4]$: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$
$\Rightarrow$ při umocňování na druhou případné záporné znaménko zmizí $\Rightarrow$ nezáleží na tom, v jakém pořadí body do vzorce dosadíme

b) jak funguje výpočet rozdílu $b_1 - a_1$ v případě, že je jedna ze souřadnic záporná?
zkusíme body $C[-1;2]$, $D[3;5]$



Zkusíme obě možnosti výpočtu:

- $(b_1 - a_1) = [3-(-1)]^2 = 4^2 = 16$
- $(a_1 - b_1) = [(-1)-3]^2 = (-4)^2 = 16$

V obou případech jsme získali stejný správný výsledek.

Je to jasné, protože platí $(b_1 - a_1)^2 = |b_1 - a_1|^2$ a $|b_1 - a_1|$ je vzdálenost obrazů čísel na číselné ose

Vzdálenost bodů $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$ v rovině udává vzorec $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$.

Př. 3: Urči vzdálenost bodů

a) $A[1;2]$ a $B[6;14]$ b) $C[5;-1]$ a $D[1;2]$

c) $E[-2;-5]$ a $F[-4;5]$

a) $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} = \sqrt{(6-1)^2+(14-2)^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

b) $|CD| = \sqrt{(d_1-c_1)^2+(d_2-c_2)^2} = \sqrt{(1-5)^2+(2-[-1])^2} = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$

c) $|EF| = \sqrt{(f_1-e_1)^2+(f_2-e_2)^2} = \sqrt{[-4-(-2)]^2+[5-(-5)]^2} = \sqrt{(-2)^2+10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

Dodatek: Na pořadí, ve kterém body do vzorečku dosadíme samozřejmě nezáleží:

$$|BA| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2} = \sqrt{(1-6)^2+(2-14)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2} = 13$$

Př. 4: Urči zbývající souřadnici bodu B tak, aby platilo: $|AB| = 2\sqrt{5}$, $A[-2;3]$, $B[x;1]$.

Napíšeme rovnici pro vzdálenost bodů *A*, a *B* a dosadíme souřadnice ze zadání.

$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} = \sqrt{[x-(-2)]^2+(1-3)^2} = \sqrt{[x+2]^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

získali jsme rovnici $\Rightarrow$ mechanická záležitost

$\sqrt{[x+2]^2+2^2} = 2\sqrt{5} \qquad /^2$

$(x+2)^2 + 4 = 20$

$x^2 + 4x + 4 + 4 = 20$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x+6)(x-2) = 0$

$x_1 = -6 \Rightarrow B_1[-6;1]$ $\qquad$ $x_2 = 2 \Rightarrow B_2[2;1]$

Př. 5: Na ose *x* najdi bod *A* tak, aby byl od bodu $B[-3;2]$ vzdálený $2\sqrt{10}$.

Problém: Dosazením do vzorce pro vzdálenost můžeme získat maximálně jednu rovnici $\Rightarrow$ musíme určit jednu ze souřadnic bodu *A*.
Bod *A* je na ose *x* $\Rightarrow$ *y*-ová souřadnice bodu je nula $\Rightarrow$ $A[x;0]$

Teď má cenu dosazovat: $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} = \sqrt{(-3-x)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{10}$

$$\sqrt{(3+x)^2+4} = 2\sqrt{10} \qquad /^2$$

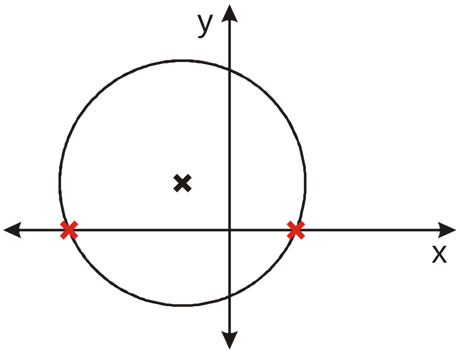
$$9+6x+x^2+4 = 4\cdot 10$$

$$x^2+6x-27=0$$

$$(x+9)(x-3)=0$$

$x_1 = -9 \Rightarrow A_1[-9;0]$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 3 \Rightarrow A_2[3;0]$

Je rozumné, že jsme v předchozím příkladu získali dva body?
Určitě je. Body vzdálené od bodu $B[-3;2]$ o $2\sqrt{10}$, tvoří kružnici. Osa *x* se s takovou kružnicí může protínat ve dvou bodech.



Pedagogická poznámka: Od začátku je nutné vést studenty k tomu, aby ještě před řešením příkladu měli přibližnou představu o výsledku. Náčrtky nemusí být konkrétní, naopak snažím se zabránit tomu, aby kreslili přesnou polohu bodů v souřadnicích.

Př. 6: Rozhodni, který z následujících vzorců, správně určuje vzdálenost bodu *A*, *B* v prostoru:

a) $|AB| = \sqrt[3]{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

b) $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

Správný vzorec je $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$.
Několik důvodů:

- Vzdálenost musí být v metrech a tedy může jít o druhou odmocninu ze součtu druhých mocnin souřadnic. Pokud vzorec obsahoval třetí odmocninu, museli bychom ji počítat ze součtu třetích mocnin.
- Vzdálenost dvou bodů v prostoru odpovídá tělesové úhlopříčce kvádru $\Rightarrow$ vzorec je opět aplikací Pythagorovy věty.

Vzdálenost bodů $A[a_1;a_2;a_3]$ a $B[b_1;b_2;b_3]$ v prostoru udává vzorec
$|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$.

Pedagogická poznámka: Poměrně dost studentů vyhodnotí jako správnou první možnost. Zdůvodní to většinou stylem: „když se tam sčítají tři závorky, musí se udělat třetí odmocnina“, nebo „ve dvou rozměrech byla druhá odmocnina, ve třech musí být třetí“. Jde o dobrý test toho, zda jsou schopni rozlišit povrchní nebo vnitřní podobnosti.

Př. 7: Urči vzdálenost bodů a) $A[1;1;-2]$ a $B[2;3;-1]$ b) $C[3;1;-1]$ a $D[0;1;-2]$.

a) $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+[-1-(-2)]^2}=$
$=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

b) $|CD|=\sqrt{(d_1-c_1)^2+(d_2-c_2)^2+(d_3-c_3)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(1-1)^2+[(-2)-(-1)]^2}=$
$=\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

Př. 8: Na ose z najdi bod, který má od bodu $C[2;-2;1]$ vzdálenost 3.

Podobné jednomu z předchozích příkladů $\Rightarrow$ bod na ose z má nenulovou pouze z-ovou souřadnici $Z[0;0;z]$.
Dosazení do vzorce pro vzdálenost

$|CZ|=\sqrt{(z_1-c_1)^2+(z_2-c_2)^2+(z_3-c_3)^2}=\sqrt{(0-2)^2+[0-(-2)]^2+(z-1)^2}=3$

$\sqrt{2^2+2^2+(z-1)^2}=3 \quad /^2$

$4+4+z^2-2z+1=9$

$z^2-2z=0$

$z(z-2)=0$

$z_1=2 \Rightarrow Z_1[0;0;2]$ $\qquad$ $z_2=0 \Rightarrow Z_2[0;0;0]$

Př. 9: Na ose x najdi bod, který má od bodu $A[5;-4;-2]$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $B[-1;2;1]$.

Bod na ose x $\Rightarrow$ souřadnice $X[x;0;0]$.
Má platit: $|XA|=2|XB|$, dosadíme:

$\sqrt{(x-5)^2+[0-(-4)]^2+[0-(-2)]^2}=2\sqrt{[x-(-1)]^2+(0-2)^2+(0-1)^2}$

$\sqrt{(x-5)^2+4^2+2^2}=2\sqrt{(x+1)^2+(-2)^2+(-1)^2} \quad /^2$

$x^2-10x+25+16+4=4(x^2+2x+1+4+1)$

$x^2 - 10x + 45 = 4x^2 + 8x + 24$

$0 = 3x^2 + 18x - 21$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$(x+7)(x-1) = 0$

$x_1 = -7 \Rightarrow X_1[-7;0;0]$ $\qquad$ $x_2 = 1 \Rightarrow X_2[1;0;0]$

Př. 10: Petáková:
strana 109/cvičení 55
strana 109/cvičení 57

Shrnutí: Vzorec pro vzdálenost bodů je aplikací Pythagorovy věty.