7.1.1 Kartézské soustavy souřadnic I

Předpoklady:

Z historie matematiky:
po krachu Pythagorejců s druhou odmocninou se řečtí matematici soustředili na geometrii $\Rightarrow$ geometrie byla nejrozvinutější částí starověké matematiky

- první matematická učebnice (Euklidovy základy) se týkala geometrie
- v geometrii bylo možné vyjádřit odmocniny
- to, co se učíme na gymnáziu z geometrie, zdaleka nepokrývá to, co Řekové objevili, o jiných částech matematiky nic nevěděli

$\Rightarrow$ ještě na začátku sedmnáctého století byla geometrie královskou disciplínou matematiky

René Descartes (odtud název souřadnic kartézské)
analytická geometrie: body v rovině (nebo v prostoru) popíšeme pomocí souřadnic (uspořádané *n*-tice čísel), pro každý geometrický útvar najdeme rovnici (nerovnici), body, které této rovnici (nerovnici) vyhovují, jsou body daného geometrického útvaru.
$\Rightarrow$ hledání průsečíků = řešení soustav rovnic (nerovnic)
$\Rightarrow$ geometrie se změní z kreslení na počítání
ve své knize geometrie podává pomocí analytického přístupu obecne řešení Pappovy úlohy, kterou Řekové uměli řešit pouze pro dvě přímky $\Rightarrow$

- konec geometrie jako královské disciplíny
- novověká matematika překonává starověkou

Později: Tři klasické problémy antické matematiky (zdvojení krychle, trisekce úhlu, kvadratura kruhu) = nikdy nevyřešené geometrické úlohy
pomocí analytické geometrie je možné snadno dokázat, že tyto úlohy jsou neřešitelné
$\Rightarrow$ definitivní potvrzení obráceného vztahu geometrie a algebry

Souřadnice na přímce
číselná osa:

- máme přímku p
- zvolíme bod O (počátek)
- zvolíme bod I, tak aby $|OI| = 1$
- každému bodu X přímky p přiřadíme reálné číslo $x = |OX|$, leží-li bod X na polopřímce OI, a číslo $x = |OI|$, leží-li bod X na polopřímce opačné k polopřímce OI.

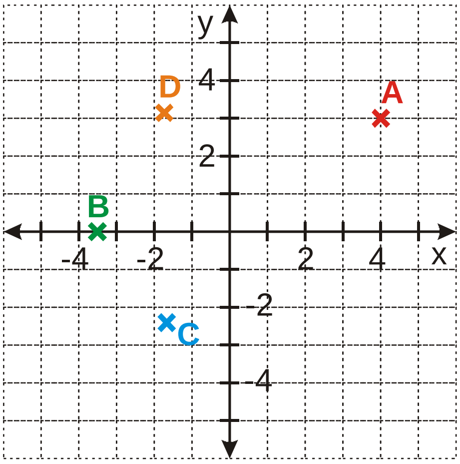
Souřadnice v rovině

> **Kartézskou soustavou souřadnic** v rovině nazýváme dvojici číselných os x, y v rovině, pro které platí:
> 1. obě osy jsou navzájem kolmé
> 2. jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0.

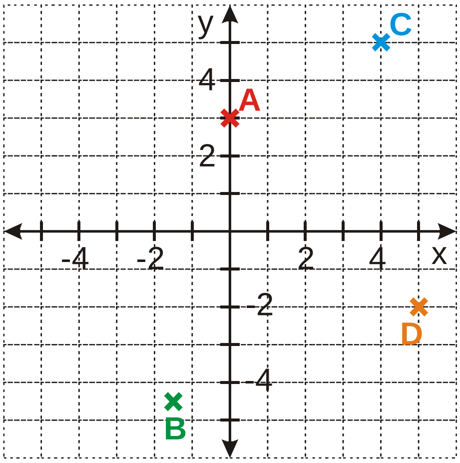
Terminologie:

- bod O – počátek kartézské soustavy souřadnic
- přímky x, y – souřadné osy

Př. 1: Do kartézské soustavy souřadnic *Oxy* zobraz body $A[4;3]$, $B[-3,5;0]$, $C\left[-\frac{5}{3};-2,4\right]$, $D\left[-\sqrt{3};\pi\right]$.



Př. 2: Urči souřadnice bodů na obrázku:



Souřadnice zakreslených bodů:

$A[0;3]$ $B[-1,5;-4,5]$ $C[4;5]$ $D[5;-2]$

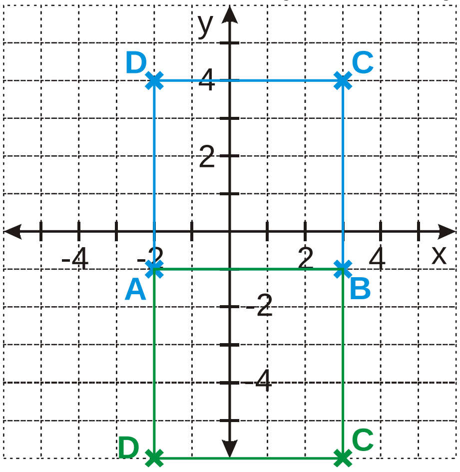
Pokud nebude řečeno jinak, nebudeme v analytické geometrii pod pokynem sestroj rozumět rýsování na papír, ale nalezení souřadnic hledaných bodů výpočtem.

Pedagogická poznámka: Přes předchozí poznámku mají někteří studenti tendenci v následujících příkladech rýsovat a nepočítat.

Pedagogická poznámka: Vlastně pro celou analytickou geometrii platí, že je na jednu stranu potřeba, aby si studenti kreslili náčrtky, které jim dají představu o situaci, kterou počítají. Na druhou stranu je třeba bránit tomu, aby kreslením zbytečně přesných obrázků (v tomto případě například číslování os podle pravítka až do deseti) ztratili příliš mnoho času.

Př. 3: Sestroj čtverec *ABCD*, jsou-li dány body $A[-2;-1]$, $B[3;-1]$.

Zakreslíme si oba body do soustavy souřadnic a dokreslíme si hledaný čtverec:



Z obrázku je zřejmé, že existují dvě řešení a strana čtverce má délku 5 $\Rightarrow$

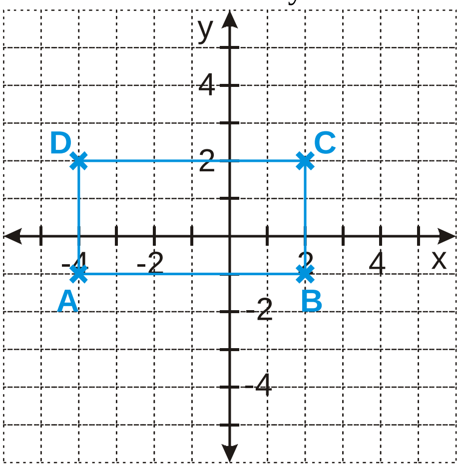
$C_1[3;-1+5] \Rightarrow C_1[3;4]$ $\qquad$ $D_1[-2;-1+5] \Rightarrow D_1[-2;4]$

$C_2[3;-1-5] \Rightarrow C_2[3;-6]$ $\qquad$ $D_2[-2;-1-5] \Rightarrow D_2[-2;-6]$

Pedagogická poznámka: Část studentů zapomene na spodní zelený čtverec. Stačí upozornit, že jim něco chybí.

Př. 4: V obdélníku *ABCD* platí: $a = 6$, $b = 3$. Urči souřadnice jeho vrcholů pokud platí: $B[2;-1]$, strana *AB* je rovnoběžná s osou *x*, strana *BC* je rovnoběžná s osou *y*, *x*-ová souřadnice bodu *A* je záporná a *y*-ová souřadnice bodu *C* je kladná.

Zakreslíme do soustavy souřadnic bod *B* a celý obdélník *ABCD*:



Z obrázku je zřejmé, že platí:

$A[2-6;-1] \Rightarrow A[-4;-1]$

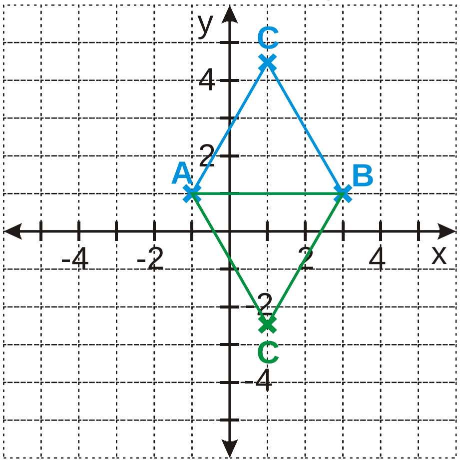
$C[2;-1+3] \Rightarrow C[2;2]$

$D[-4;-1+3] \Rightarrow D[-4;2]$

Pedagogická poznámka: Po zkušenostech s předchozím příkladem někteří studenti nezkontrolují platnost všech podmínek a kreslí obdélníků víc. Opět stačí upozornit na zadání.

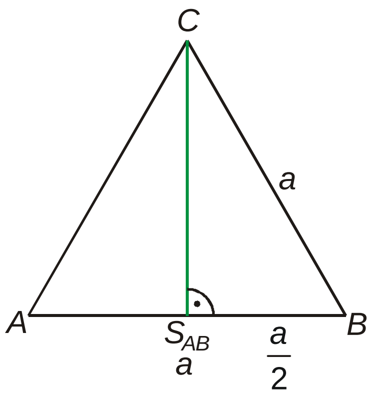
Př. 5: Sestroj rovnostranný trojúhelník *ABC*. Jsou dány body $A[-1;1]$, $B[3;1]$.

Zakreslíme si zadané body do soustavy souřadnic:



Zbývající vrchol trojúhelníka budeme hledat pomocí výšky na stranu *AB* $\Rightarrow$

- *x*-ová souřadnice se rovná 1 (stejná jako souřadnice středu úsečky *AB*)
- *y*-ová souřadnice se liší od souřadnic bodů *A*, *B* o velikost výšky



Délku výšky $S_{AB}C$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BC$:

$$|S_{AB}C|^2 = |BC|^2 - |S_{AB}B|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}C|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$|S_{AB}C| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

výška trojúhelníka: $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$

$C_1\left[1;1+2\sqrt{3}\right]$ $\quad$ $C_2\left[1;1-2\sqrt{3}\right]$

Pedagogická poznámka: Obrázek nakreslí všichni, stejně tak nemají studenti problémy s určením *x*-ové souřadnice bodů C_1, C_2, ale určení *y*-ové souřadnice není tak snadné. Poměrně často se objevuje výsledek $C_1[1;5]$ s tím, že strana trojúhelníka je 4. Stačí, aby si studenti napsali ke stranám trojúhelníka jejich délky.

Shrnutí: