6.3.3 Binomická rovnice

Předpoklady: 6302

Binomickou rovnicí je každá rovnice, kterou lze napsat ve tvaru $x^n - a = 0$, $a \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}; n > 1$
Například:

- $x^6 - 1 = 0$
- $x^{12} - 2 - i = 0$

Jak najít řešení rovnice $x^n - a = 0$?
Nápad: Umocňování jde snadno v goniometrickém tvaru $\Rightarrow$ převedeme *x* i *a* do goniometrického tvaru.

- $x = |x| \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi)$
- $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Dosadím do rovnice $x^n - a = 0$:

$$\left[|x|(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]^n - \left[|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right] = 0$$

$\left[|x|(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]^n = \left[|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]$ levou stranu můžeme umocnit $\Rightarrow$

$|x|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ rovnost dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru, pravé číslo známe, levé chceme určit.
Kdy se rovnají dvě komplexní čísla v goniometrickém tvaru?
a) rovnají se jejich absolutní hodnoty

$|x|^n = |a|$ obě čísla jsou kladná $\Rightarrow$ rovnici můžeme odmocnit

$$\sqrt[n]{|x|^n} = \sqrt[n]{|a|}$$

$|x| = \sqrt[n]{|a|}$ Určili jsme absolutní hodnotu hledaného čísla *x* (půl práce je hotovo).

b) jejich argumenty se rovnají (nebo se liší o 2π)

$n\varphi = \alpha$ nebo $n\varphi = \alpha + 2\pi$ nebo $n\varphi = \alpha + 4\pi$ nebo …

$\Rightarrow$ všechny možnosti zapíšeme pomocí parametru: $n\varphi = \alpha + k \cdot 2\pi$ $k \in Z$

vypočteme φ: $\varphi = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$ - určili jsme argument hledaného čísla *x*

$\Rightarrow$ dáme oba výsledky dohromady:

$$x = |x| = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \qquad k \in Z$$

(absolutní hodnota je určena jednoznačně, argumentů je zřejmě nekonečně mnoho (kvůli periodicitě goniometrických funkcí)

Zkusíme si to na nějaké jednoduché rovnici:

$x^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Převedeme na goniometrický tvar: $a = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

Určíme absolutní hodnotu *x*: $|x| = \sqrt[n]{1} = 1$

Určíme argument x: $\alpha = 0$, $\varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, $k \in Z \Rightarrow$

řešení bude víc $\Rightarrow$ určíme první z argumentů pro $k = 0$:

$\varphi_o = \frac{0 + 2\pi 0}{4} = 0$ $\qquad$ $x_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$ (ten bychom uhádli z hlavy)

pokračujeme dál:

$k = 1$ $\qquad$ $\varphi_1 = \frac{0 + 2\pi \cdot 1}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x_1 = 1 \cdot \left(\cos \cdot \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i$

$k = 2$ $\qquad$ $\varphi_2 = \frac{0 + 2\pi \cdot 2}{4} = \pi$ $\qquad$ $x_2 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -1$

$k = 3$ $\qquad$ $\varphi_3 = \frac{0 + 2\pi \cdot 3}{4} = \frac{3}{2}\pi$ $\qquad$ $x_3 = 1\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2} \right) = -i$

$k = 4$ $\qquad$ $\varphi_4 = \frac{0 + 2\pi \cdot 4}{4} = 2\pi$ $\qquad$ $x_4 = 1(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$ to je x_0

$k = 5$ $\qquad$ $\varphi_5 = \frac{0 + 2\pi \cdot 5}{4} = \frac{5\pi}{2}$ $\qquad$ $x_5 = 1\left(\cos \frac{5}{2}\pi + i \sin \frac{5}{2}\pi \right) = i$ to je x_1

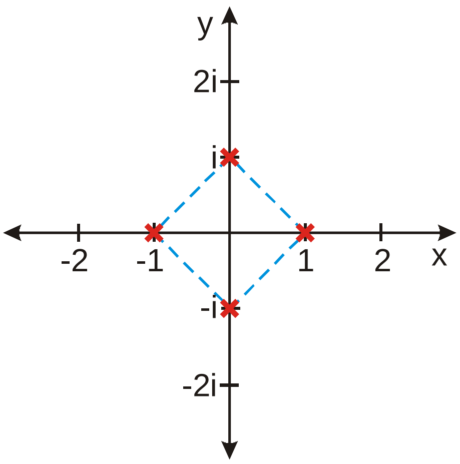
Získali jsme jenom čtyři čísla, pak se to začalo opakovat. V našem případě $k = 4 = n$.

Ověříme obecně $\varphi_n = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2n\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi$ - stejný výsledek jako pro $k = 0 \Rightarrow$ má smysl počítat pouze prvních n kořenů.

Binomická rovnice $x^n - a = x^n - |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 0$ **má v oboru komplexních čísel právě *n* různých kořenů, a to** $x = |x| = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$**,**

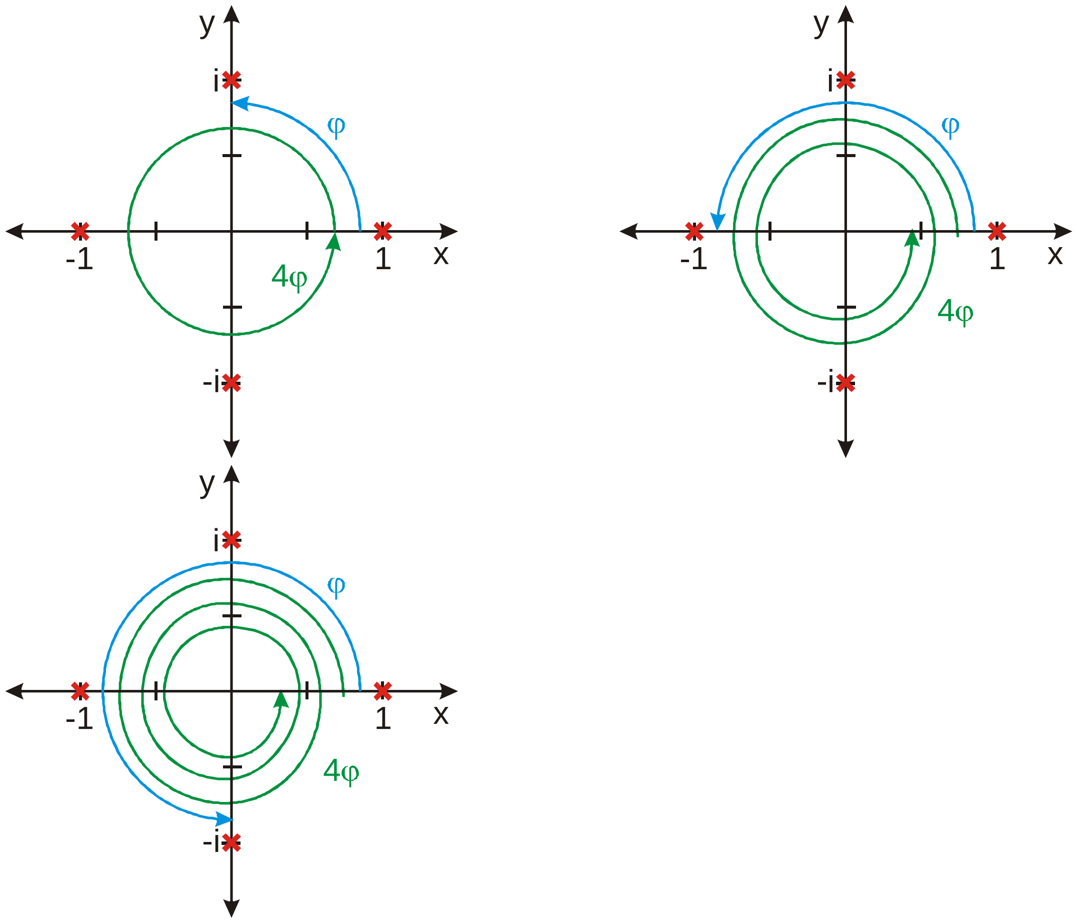
$k = 0; 1; 2; \ldots; n - 1$**.**

Př. 1: Zakresli do Gaussovy roviny obrazy kořenů binomické rovnice $x^4 - 1 = 0$.



Obrazy kořenů tvoří vrcholy čtverce.

Předchozí obrázek může dobře posloužit i k názorné demonstraci toho, jak umocnění na čtvrtou může z různých čísel vyrobit stejné číslo.



Př. 2: Vyřeš rovnici: $x^3+27=0$. Zakresli obrazy kořenů do Gaussovy roviny.

Rovnici upravíme, aby bylo vidět číslo *a*: $x^3+27=x^3-(-27)=0$

$a=-27=27(\cos\pi+i\sin\pi)$

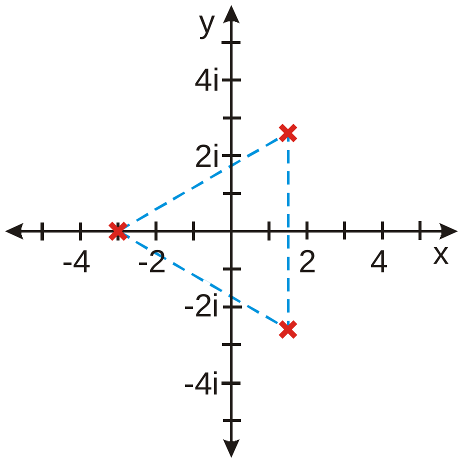
absolutní hodnota: $|x|=\sqrt[3]{27}=3$

argumenty:

$k=0 \quad \varphi_0=\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}=\frac{\pi}{3} \qquad x_0=3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$k=1 \quad \varphi_1=\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}=\pi \qquad x_1=3\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=-3$

$k=2 \quad \varphi_2=\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}=\frac{5}{3}\pi \qquad x_2=3\cdot\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$



Obrazy kořenů tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku.

Př. 3: Vyslov hypotézu, která popisuje, jaký obrazec tvoří v Gaussově rovině obrazy kořenů binomické rovnice.

Obrazy kořenů binomické rovnice $x^n - a = 0$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka, který je vepsán do kružnice se středem v počátku poloměrem $r = \sqrt[n]{|a|}$

Tato hypotéza je pravdivá. My si ji dokazovat nebudeme.

Př. 4: Vyřeš rovnici: $x^4 - \sqrt{8} + i\sqrt{8} = 0$. Zakresli obrazy kořenů do Gaussovy roviny.

Upravíme rovnici, abychom věděli číslo a: $x^4 - \sqrt{8} + i\sqrt{8} = x^4 - \left(\sqrt{8} - i\sqrt{8}\right) = 0$

$a = \sqrt{8} - i\sqrt{8} = 4\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

absolutní hodnota: $|x| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

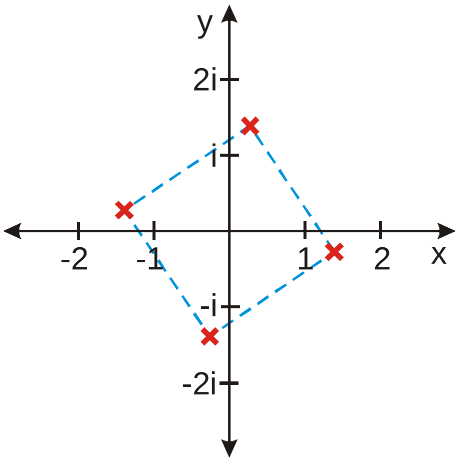
argumenty:

$k = 0$ $\quad \varphi_0 = \dfrac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi\cdot 0}{4} = \dfrac{7}{16}\pi$ $\quad x_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi + i\sin\frac{7}{16}\pi\right)$

$k = 1$ $\quad \varphi_1 = \dfrac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi\cdot 1}{4} = \dfrac{15}{16}\pi$ $\quad x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi + i\sin\frac{15}{16}\pi\right)$

$k = 2$ $\quad \varphi_2 = \dfrac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi\cdot 2}{4} = \dfrac{23}{16}\pi$ $\quad x_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi + i\sin\frac{23}{16}\pi\right)$

$k = 3$ $\quad \varphi_3 = \dfrac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi\cdot 3}{4} = \dfrac{31}{16}\pi$ $\quad x_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{31}{16}\pi + i\sin\frac{31}{16}\pi\right)$



Př. 5: Petáková:
strana 140/cvičení 68 c) d)
strana 140/cvičení 69 b) d)
strana 140/cvičení 70 a)

Shrnutí: