

## 6.2.5 Moivreova věta

### Předpoklady: 6204

Z minulé hodiny máme vzorec pro součin libovolného počtu čísel v goniometrickém tvaru:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \left[ \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) \right]$$

Můžeme ho použít i na výpočet přirozené mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

$$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z = r \cdot r \cdot \dots \cdot r \left[ \cos(\varphi + \varphi + \dots + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi + \dots + \varphi) \right] = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

to už je pořádné usnadnění.

Pro každé přirozené číslo  $n$  a pro každé komplexní číslo  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

platí:  $z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Speciálním případem jsou komplexní čísla, pro která platí  $r = 1$  (komplexní jednotky), pro ně se vzorec ještě více zjednoduší:  $z^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ . Tento vzorec se nazývá Moivreova věta.

**Moivreova věta:** Pro každé přirozené číslo  $n$  a libovolné reálné číslo  $\varphi$  platí:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

**Př. 1:** Vypočti:

a)  $\left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{15}$

b)  $\left[ \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^8$

a)

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{15} &= \cos 15 \cdot \frac{\pi}{6} + i \sin 15 \cdot \frac{\pi}{6} = \cos \frac{15}{6} \pi + i \sin \frac{15}{6} \pi = \cos \frac{5}{2} \pi + i \sin \frac{5}{2} \pi = \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\left[ \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^8 = (\sqrt[4]{2})^8 \left( \cos 8 \frac{\pi}{4} + i \sin 8 \frac{\pi}{4} \right) = 4 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$$

**Př. 2:** Vypočti  $(\sqrt{3} + i)^6$ . Poté číslo převed' do goniometrického tvaru, umocni ho v něm a výsledek převed' zpátky do algebraického tvaru. Porovnej oba způsoby výpočtu.

algebraicky:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3} + i)^6 &= \left[ (\sqrt{3} + i)^2 \right]^3 = (3 + i2\sqrt{3} + i^2)^3 = (2 + i2\sqrt{3})^2 (2 + i2\sqrt{3}) = \\
&= (2^2 + i2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} + i^2 4 \cdot 3)(2 + i2\sqrt{3}) = (-8 + i8\sqrt{3})(2 + i2\sqrt{3}) = \\
&= -16 - i16\sqrt{3} + i16\sqrt{3} + i^2 16 \cdot 3 = -16 - 48 = -64
\end{aligned}$$

v goniometrickém tvaru:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3} + i)^6 &= \left[ 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^6 = 2^6 \left( \cos 6 \frac{\pi}{6} + i \sin 6 \frac{\pi}{6} \right) = 64 (\cos \pi + i \sin \pi) = \\
&= 64(-1 + i0) = -64
\end{aligned}$$

Goniometrický tvar vítězí.

**Př. 3:** Vypočti:

$$\text{a) } (-1 + i)^{40} \qquad \text{b) } \left( \frac{1}{1 + i} \right)^{14}$$

Vzhledem k velikosti mocnin je jasné, že budeme mocnit v goniometrickém tvaru.

a)

$$\begin{aligned}
(-1 + i)^{40} &= \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) \right]^{40} = (\sqrt{2})^{40} \left( \cos 40 \frac{3}{4} \pi + i \sin 40 \frac{3}{4} \pi \right) = \\
&= 2^{20} \left( \cos \frac{120}{4} \pi + i \sin \frac{120}{4} \pi \right) = 2^{20} (\cos 30\pi + i \sin 30\pi) = 2^{20} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{20}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + i} &= \frac{1}{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] \\
\left( \frac{1}{1 + i} \right)^{14} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] \right)^{14} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{14} \left[ \cos \left( -14 \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -14 \frac{\pi}{4} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2^7} \left[ \cos \left( -\frac{7}{2} \pi \right) + i \sin \left( -\frac{7}{2} \pi \right) \right] = \frac{1}{2^7} \left[ \cos \left( -\frac{3}{2} \pi \right) + i \sin \left( -\frac{3}{2} \pi \right) \right] = \\
&= \frac{1}{128} \left[ \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{128} [0 + i \cdot 1] = \frac{i}{128}
\end{aligned}$$

Pomocí Moivreovy věty je možné snadno odvodit vzorce pro vyjádření funkcí  $\sin kx$  a  $\cos kx$  pomocí mocnin  $\sin x$  a  $\cos x$ .

$$\text{Například platí: } (\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

Umocníme levou stranu:

$$\begin{aligned}
(\cos x + i \sin x)^3 &= \cos^3 x + 3 \cos^2 x \cdot i \sin x + 3 \cos x (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 = \\
&= \cos^3 x + i \cdot 3 \cos^2 x \sin x + i^2 3 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \\
&= \cos^3 x + i \cdot 3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x
\end{aligned}$$

Napíšeme opět obě strany rovnosti:

$$\cos^3 x + i \cdot 3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = \cos 3x + i \sin 3x$$

- **Reálné části:**  $\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos 3x$
- **Imaginární části:**  $i \cdot 3 \cos^2 x \sin x - i \sin^3 x = i \sin 3x$   
 $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \sin 3x$

Vzorce jsou hotové.

**Př. 4:** Odvod' pomocí Moivreovy věty vzorce pro  $\sin 2x$  a  $\cos 2x$ .

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$$

Umocníme levou stranu:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \cdot i \sin x + (i \sin x)^2 =$$

$$= \cos^2 x + i 2 \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x = \cos^2 x + i 2 \cos x \sin x - \sin^2 x$$

Napíšeme opět obě strany rovnosti:

$$\cos^2 x + i 2 \cos x \sin x - \sin^2 x = \cos 2x + i \sin 2x$$

- Reálné části:  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
- Imaginární části:  $i 2 \cos x \sin x = i \sin 2x$   
 $2 \cos x \sin x = \sin 2x$

Moivreova věta platí i pro záporné celočíselné mocnitele.

$$n \text{ je záporné celé číslo: } (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n}}$$

-n je přirozené  $\Rightarrow$  na jmenovatel použijeme Moivreovu větu

$$\frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n}} = \frac{1}{[\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)]} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

$\Rightarrow$  platí i pro záporné  $n$

**Př. 5:** Petáková:

strana 138/cvičení 42 a) d) e)

strana 138/cvičení 43

strana 138/cvičení 44

**Shrnutí:**