6.2.5 Moivreova věta

Předpoklady: 6204

Z minulé hodiny máme vzorec pro součin libovolného počtu čísel v goniometrickém tvaru:
$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n\right)\right]$

Můžeme ho použít i na výpočet přirozené mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru.
$z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = r \cdot r \cdot \ldots \cdot r\left[\cos\left(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi\right)+i\sin\left(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi\right)\right] = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$
to už je pořádné usnadnění.

Pro každé přirozené číslo n a pro každé komplexní číslo $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$
platí: $z^n = \left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$

Speciálním případem jsou komplexní čísla, pro která platí $r = 1$ (komplexní jednotky), pro ně se vzorec ještě více zjednoduší: $z^n = \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Tento vzorec se nazývá Moivreova věta.

Moivreova věta: Pro každé přirozené číslo n a libovolné reálné číslo φ platí:
$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Př. 1: Vypočti:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{15}$ b) $\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8$

a)
$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{15} = \cos 15\cdot\frac{\pi}{6}+i\sin 15\cdot\frac{\pi}{6} = \cos\frac{15}{6}\pi + i\sin\frac{15}{6}\pi = \cos\frac{5}{2}\pi + i\sin\frac{5}{2}\pi =$
$= \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

b)
$\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8 = \left(\sqrt[4]{2}\right)^8\left(\cos 8\frac{\pi}{4}+i\sin 8\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right)$

Př. 2: Vypočti $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$. Poté číslo převeď do goniometrického tvaru, umocni ho v něm a výsledek převeď zpátky do algebraického tvaru. Porovnej oba způsoby výpočtu.

algebraicky:

$\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^2\right]^3=\left(3+i2\sqrt{3}+i^2\right)^3=\left(2+i2\sqrt{3}\right)^2\left(2+i2\sqrt{3}\right)=$

$=\left(2^2+i2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}+i^2 4\cdot 3\right)\left(2+i2\sqrt{3}\right)=\left(-8+i8\sqrt{3}\right)\left(2+i2\sqrt{3}\right)=$

$=-16-i16\sqrt{3}+i16\sqrt{3}+i^2 16\cdot 3=-16-48=-64$

v goniometrickém tvaru:

$\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=2^6\left(\cos 6\frac{\pi}{6}+i\sin 6\frac{\pi}{6}\right)=64\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=$

$=64\left(-1+i0\right)=-64$

Goniometrický tvar vítězí.

Př. 3: Vypočti:

a) $\left(-1+i\right)^{40}$ b) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{14}$

Vzhledem k velikosti mocnin je jasné, že budeme mocnit v goniometrickém tvaru.

a)

$\left(-1+i\right)^{40}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right]^{40}=\left(\sqrt{2}\right)^{40}\left(\cos 40\frac{3}{4}\pi+i\sin 40\frac{3}{4}\pi\right)=$

$=2^{20}\left(\cos\frac{120}{4}\pi+i\sin\frac{120}{4}\pi\right)=2^{20}\left(\cos 30\pi+i\sin 30\pi\right)=2^{20}\left(\cos 0+i\sin 0\right)=2^{20}$

b)

$\frac{1}{1+i}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{14}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^{14}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{14}\left[\cos\left(-14\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-14\frac{\pi}{4}\right)\right]=$

$=\frac{1}{2^7}\left[\cos\left(-\frac{7}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{2}\pi\right)\right]=\frac{1}{2^7}\left[\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right]=$

$=\frac{1}{128}\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{128}\left[0+i\cdot 1\right]=\frac{i}{128}$

Pomocí Moivreovy věty je možné snadno odvodit vzorce pro vyjádření funkcí $\sin kx$ a $\cos kx$ pomocí mocnin $\sin x$ a $\cos x$.

Například platí: $\left(\cos x+i\sin x\right)^3=\cos 3x+i\sin 3x$

Umocníme levou stranu:

$\left(\cos x+i\sin x\right)^3=\cos^3 x+3\cos^2 x\cdot i\sin x+3\cos x\left(i\sin x\right)^2+\left(i\sin x\right)^3=$

$=\cos^3 x+i\cdot 3\cos^2 x\sin x+i^2 3\cos x\sin^2 x+i^3\sin^3 x=$

$=\cos^3 x+i\cdot 3\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x$

Napíšeme opět obě strany rovnosti:

$\cos^3 x + i\cdot 3\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x = \cos 3x + i\sin 3x$

- **Reálné části:** $\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos 3x$
- **Imaginární části:** $i\cdot 3\cos^2 x\sin x - i\sin^3 x = i\sin 3x$

$$3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = \sin 3x$$

Vzorce jsou hotové.

Př. 4: Odvoď pomocí Moivreovy věty vzorce pro $\sin 2x$ a $\cos 2x$.

$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$

Umocníme levou stranu:

$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x\cdot i\sin x + (i\sin x)^2 =$

$= \cos^2 x + i2\cos x\sin x + i^2\sin^2 x = \cos^2 x + i2\cos x\sin x - \sin^2 x$

Napíšeme opět obě strany rovnosti:

$\cos^2 x + i2\cos x\sin x - \sin^2 x = \cos 2x + i\sin 2x$

- Reálné části: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
- Imaginární části: $i2\cos x\sin x = i\sin 2x$

$$2\cos x\sin x = \sin 2x$$

Moivreova věta platí i pro záporné celočíselné mocnitele.

n je záporné celé číslo: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \dfrac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n}}$

-n je přirozené $\Rightarrow$ na jmenovatel použiju Moivreovu větu

$$\frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n}} = \frac{1}{\left[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\right]} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

$\Rightarrow$ platí i pro záporné n

Př. 5: Petáková:
strana 138/cvičení 42 a) d) e)
strana 138/cvičení 43
strana 138/cvičení 44

Shrnutí: