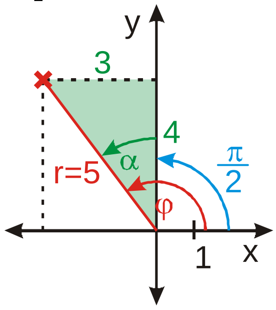
## 6.2.3 Goniometrický tvar komplexních čísel II

**Předpoklady:** 6202

**Př. 1:** Zapiš v goniometrickém tvaru komplexní čísla:
a) $z_1 = -3+4i$ b) $z_2 = -12-5i$

a) $z_1 = -3+4i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$

**1. pomocí obrázku**




Zelený trojúhelník: $\sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 36°52'$

$\varphi = 90° + \alpha = 90° + 36°52' = 126°52'$

$z = -3+4i = 5(\cos 126°52' + i\sin 126°52')$

**2. pomocí rovnic**

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{3}{5}$

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{4}{5}$

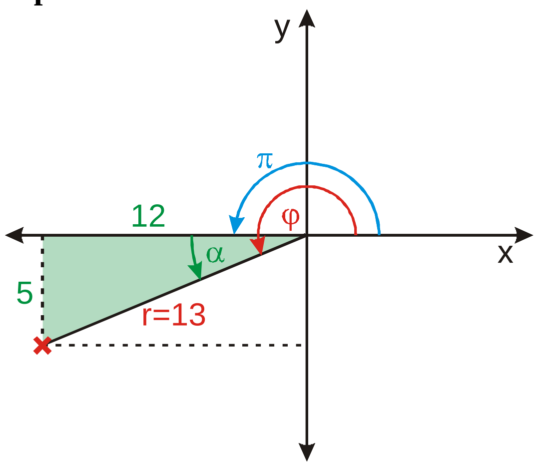
$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ nejedná se o žádnou z tabulkových hodnot $\Rightarrow$ určíme pomocí kalkulačky s přesností na minuty

$\varphi = 126°52'$

$z = -3+4i = 5(\cos 126°52' + i\sin 126°52')$

b) $z_2 = -12-5i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-12)^2+(-5)^2} = 13$

**1. pomocí obrázku**




Zelený trojúhelník: $\sin\alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha = 22°37'$

$\varphi = 180° + \alpha = 180° + 22°37' = 202°37'$

$z_2 = -12-5i = 13(\cos 202°37' + i\sin 202°37')$

**2. pomocí rovnic**

$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{12}{13}$

$\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{5}{13}$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí:

$\cos\varphi = -\frac{12}{13}$, $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$ $\Rightarrow$ nejedná se o žádnou z tabulkových hodnot $\Rightarrow$ určíme pomocí kalkulačky s přesností na minuty

$\varphi = 202°37'$

$z_2 = -12-5i = 13(\cos 202°37' + i\sin 202°37')$

**Př. 2:** Petáková:
strana 137/cvičení 31 $z_2$, $z_3$

**Př. 3:** Zapiš v goniometrickém tvaru komplexní číslo $\frac{10-2i}{3+2i}$.

Číslo není v algebraickém tvaru $\Rightarrow$ nejdřív ho musíme převést.

$$\frac{10-2i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{30-20i-6i+4i^2}{9+4}=\frac{26-26i}{13}=2-2i.$$

Předvádíme stejně jako dosud:

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$z=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi=\frac{7}{4}\pi$

$$\frac{10-2i}{3+2i}=2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

**Př. 4:** Petáková:
strana 137/cvičení 34 d) a)

**Př. 5:** Rozhodni zda je číslo $z=\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{\pi}{3}$ zapsáno v goniometrickém tvaru. Pokud ne, zapiš jej v něm.

Na první pohled se zdá, že číslo $z=\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{\pi}{3}$ je goniometrickém tvaru, ale před imaginární částí by nemělo být mínus (goniometrický tvar $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$) $\Rightarrow$ snažíme se jej odstranit.

Použijeme: $\sin(-x)=-\sin x$.

$$z=\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Uvnitř obou goniometrických funkcí musí být stejný úhel.

Použijeme: $\cos x=\cos(-x)$

$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ To už je goniometrický tvar.

Pomocí periodicity funkcí sin a cos s periodou $2\pi$, můžeme napsat úhel v základní velikosti:

$$z=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\frac{5}{3}\pi+i\cdot\sin\frac{5}{3}\pi$$

**Př. 6:** Zapiš v goniometrickém tvaru číslo $z = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}$.

Na první pohled se zdá, že číslo $z = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}$ je téměř v goniometrickém tvaru, ale překáží nám tam jednička $\Rightarrow$ najdeme si reálnou a imaginární část a budeme postupovat klasicky.

reálná část: $1 + \cos\frac{\pi}{3}$ imaginární část: $\sin\frac{\pi}{3}$

Absolutní hodnota:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

Převedeme pomocí rovnic: $z = \sqrt{3}\left(\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} + i \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = |z|(\cos\varphi + \sin\varphi)$

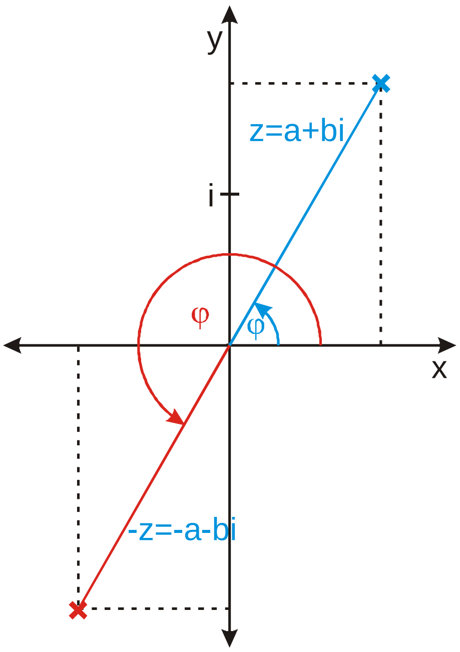
$\Rightarrow$ hledáme úhel pro který platí: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

$$z = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

**Př. 7:** Je dána komplexní jednotka $z = \cos x + i \sin x$. Zapiš v goniometrickém tvaru číslo $-z$.

Vypočteme si algebraický tvar a uvidíme: $-z = -(\cos x + i \sin x) = -\cos x - i \sin x$

Nakreslíme si obrázek.




Z obrázku je vidět, že obrazy obou komplexních čísel jsou středově souměrné (nebo otočené o $180°$) $\Rightarrow$ obě čísla se liší pouze v argumentech. Pro argumenty platí: $\varphi_{-z} = \varphi_z + \pi \Rightarrow$

$-z=-(\cos x+i\sin x)=-\cos x-i\sin x=\cos(x+\pi)+i\sin(x+\pi)$

**Př. 8:** Petáková:
strana 137/cvičení 37 a) b)

**Př. 9:** Je dáno komplexní číslo $z=2-3i$. Najdi přesnou hodnotu komplexního čísla $w$ v algebraickém tvaru, které bude mít dvojnásobnou absolutní hodnotu a dvojnásobný argument.

Zkusíme zapsat číslo $z=2-3i$ v goniometrickém tvaru: $|z|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$z=2-3i=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}}i\right)\Rightarrow\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\sin\varphi=-\frac{3}{\sqrt{13}}$ - nejde o tabulkové hodnoty

$\Rightarrow$ nemůžeme přesně určit argument a tedy ani jeho dvojnásobek
Pro algebraický tvar nepotřebujeme znát hodnotu $\varphi$, stačí znát hodnotu $\cos 2\varphi$ a $\sin 2\varphi$.
Tyto hodnoty určíme pomocí vzorců pro goniometrické funkce

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2-\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2=\frac{4}{13}-\frac{9}{13}=-\frac{5}{13}$$

$$\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi=2\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=-\frac{12}{13}$$

$$w=2|z|(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=2\sqrt{13}\left[-\frac{5}{13}+i\left(-\frac{12}{13}\right)\right]=-\frac{10\sqrt{13}}{13}-i\frac{24\sqrt{13}}{13}$$

**Př. 10:** Petáková:
strana 137/cvičení 39

## Shrnutí: