

6.2.1 Zobrazení komplexních čísel v Gaussově rovině

Předpoklady: 6105

Pedagogická poznámka: Stihnout obsah hodiny je poměrně náročné. Při dostatku času je lepší dojít pouze k příkladu 7 a zbytek hodiny spojit s úvodem hodiny příští, která je také poměrně náročná.

Reálná čísla můžeme zobrazit na číselnou osu. \Rightarrow Jak bychom mohli zobrazit čísla komplexní?

Problém: Na číselnou osu se nevejdou, je už zcela zaplněná reálnými čísly (a ty tvoří jen malou část čísel komplexních).

\Rightarrow

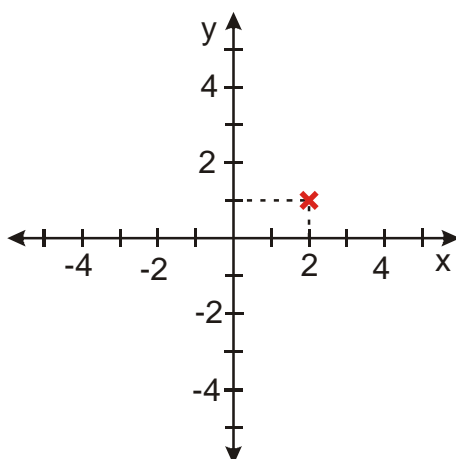
Nápad: komplexní číslo $z = a + bi$ - je určeno pomocí uspořádané dvojice reálných čísel (reálná část a a imaginární část b).

Uspořádané dvojice reálných čísel jsme už zobrazovali například u funkcí: dvojici čísel $[x; f(x)]$ jsme přiřadili bod v rovině, jehož kartézské souřadnice byly $[x; f(x)]$.

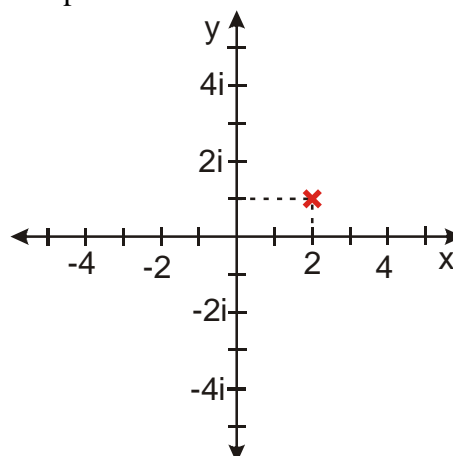
\Rightarrow stejně můžeme postupovat u komplexních čísel a zobrazovat je jako body v rovině.

Obrazem komplexního čísla $z = a + bi$ bude bod v rovině o kartézských souřadnicích $[a; b]$.

Př. 1: Nakresli obrázek s kartézskou soustavou souřadnic a zakresli do ní obraz komplexního čísla $2 + i$.

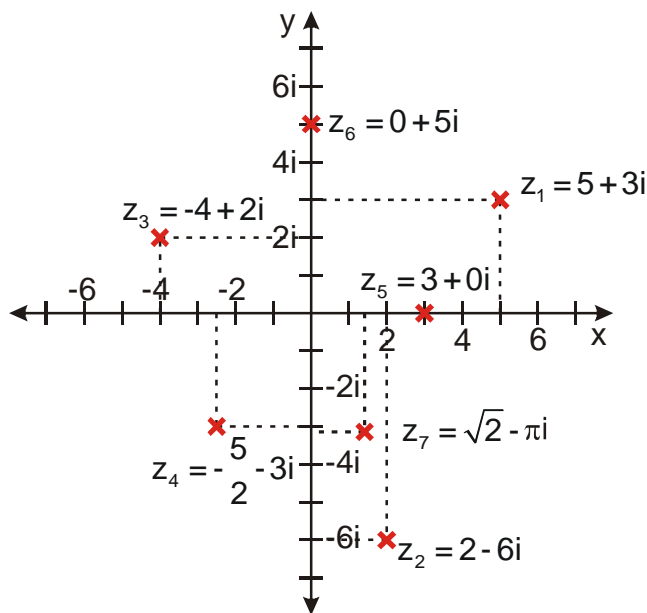


Protože na svislou osu vynášíme hodnoty imaginární části komplexního čísla, značíme ji rovnou pomocí násobků i .



Př. 2: Do obrázku nakresli obrazy komplexních čísel: $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 2 - 6i$, $z_3 = -4 + 2i$,

$$z_4 = -\frac{5}{2} - 3i, z_5 = 3 + 0i, z_6 = 0 + 5i, z_7 = \sqrt{2} - \pi i.$$



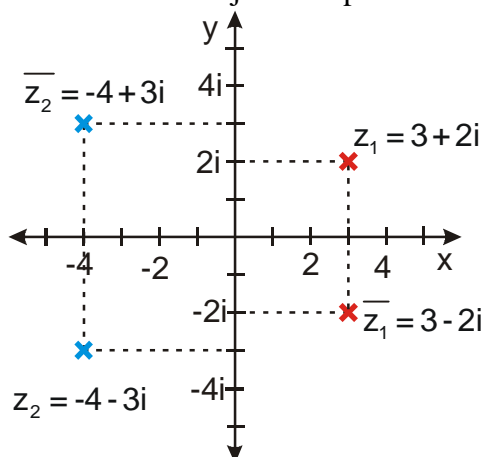
Pojmenování:

- Rovina jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel se nazývá **Gaussova rovina** (podle svého objevitele) nebo **rovina komplexních čísel**
- Osa x (na ní se zobrazí čísla tvaru $a + 0i$, tedy reálná čísla) = **reálná osa**
- Osa y (na ní se zobrazí čísla tvaru $0 + bi$, tedy ryze imaginární čísla) = **imaginární osa**

Př. 3: Rozhodni jaký geometrický vztah je mezi obrazy komplexních čísel:

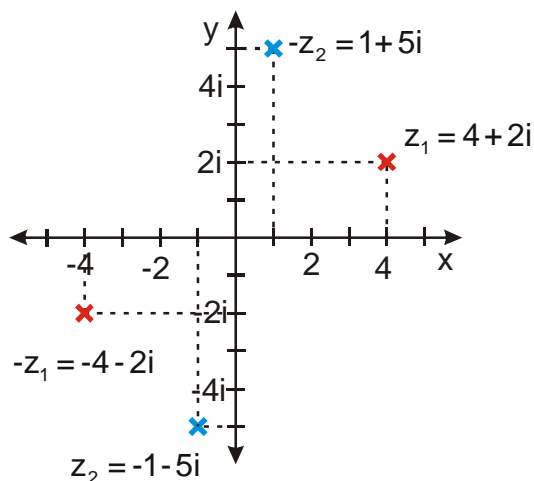
- a) komplexně sdružených b) opačných

a) Zobrazíme dvě dvojice komplexně sdružených čísel:



⇒ z obrázku je vidět, že obrazy komplexně sdružených čísel jsou navzájem osově souměrné podle reálné osy.

b) Zobrazíme dvě dvojice opačných čísel:



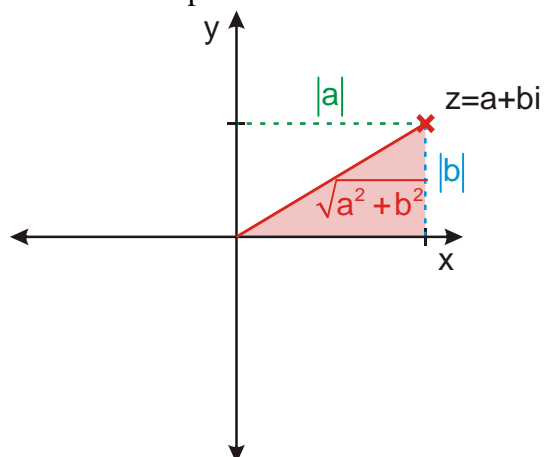
⇒ z obrázku je vidět, že obrazy opačných čísel jsou navzájem středově souměrné podle počátku.

Jak je to s absolutní hodnotou?

Reálná čísla: absolutní hodnota = vzdálenost obrazu čísla na ose od počátku

Platí to i pro obrazy komplexních čísel v Gaussově rovině?

Nakreslíme si komplexní číslo $z = a + bi$, platí pro něj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a vypočteme jeho vzdálenost od počátku.



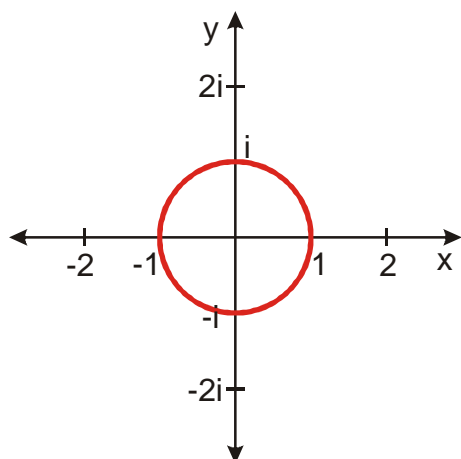
Z obrázku je vidět, vzdálenost obrazu komplexního čísla z od počátku se určí jako přepona v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $|a|$ a $|b|$ ⇒ $d = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, což je vztah pro absolutní hodnotu čísla z .

⇒ podobně jako u reálných čísel platí:

Vzdálenost obrazu komplexního čísla v Gaussově rovině od počátku souřadnic je rovna jeho absolutní hodnotě.

Př. 4: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech čísel, pro která platí $|z| = 1$.

$|z| = 1$ ⇒ hledáme čísla vzdálená od počátku o 1 ⇒ body na kružnici se středem v počátku a poloměrem 1



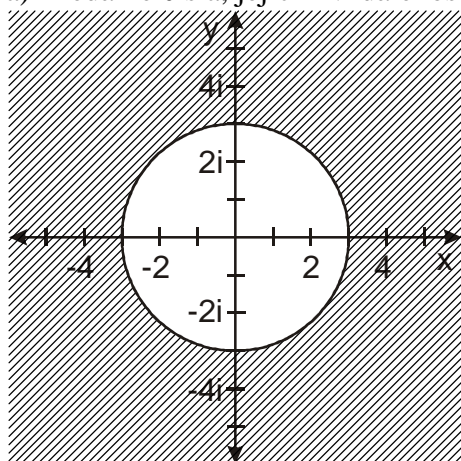
Na kružnici je nekonečně mnoho bodů \Rightarrow komplexních jednotek je nekonečně mnoho. Stejně tak bude nekonečně mnoho komplexních čísel s libovolnou další velikostí absolutní hodnoty.

Př. 5: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která platí:

a) $|z| \geq 3$

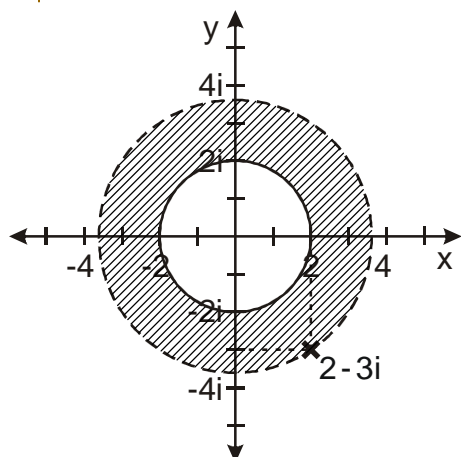
b) $|2 - 3i| > |z| \geq 2$

a) Hledáme čísla, jejichž vzdálenost od počátku je větší nebo rovna třem.



b) Hledaná čísla musí splňovat dvě podmínky:

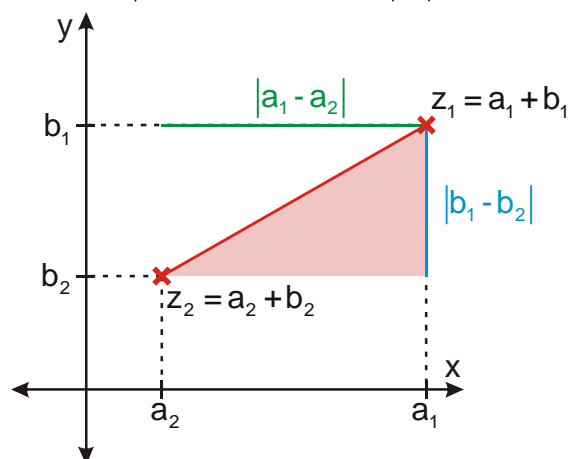
- $|2 - 3i| > |z| \Rightarrow$ jejich vzdálenost od počátku je menší vzdálenost čísla $2 - 3i$
- $|z| \geq 2 \Rightarrow$ jejich vzdálenost od počátku je větší nebo rovna 2



Podobně jako u reálných čísel platí, že **absolutní hodnota z rozdílu dvou komplexních čísel** $|z_1 - z_2|$ **se rovná vzdálenosti jejich obrazů v Gaussově rovině.**

Př. 6: (BONUS) Dokaž, že absolutní hodnota z rozdílu dvou komplexních čísel se rovná vzdálenosti jejich obrazů v Gaussově rovině.

$$|z_1 - z_2| = |(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i)| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$



Z obrázku je vidět, vzdálenost obrazů obou komplexních čísel se určí jako přepona v pravouhlém trojúhelníku s odvěsnami $|a|$ a $|b| \Rightarrow$

$$d = \sqrt{|a_1 - a_2|^2 + |b_1 - b_2|^2} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

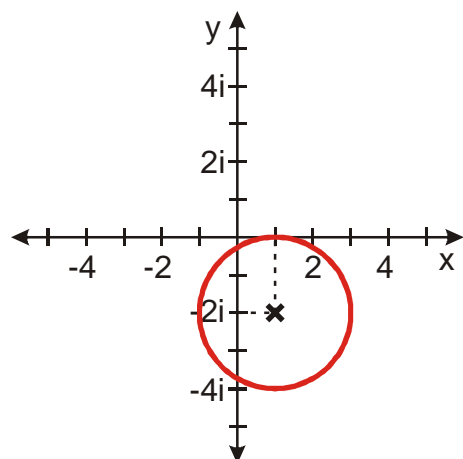
Př. 7: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která platí:

a) $|z - 1 + 2i| = 2$

b) $|z + 3 - 2i| < 3$

a) $|z - 1 + 2i| = 2$ V absolutní hodnotě je rozdíl dvou komplexních čísel.

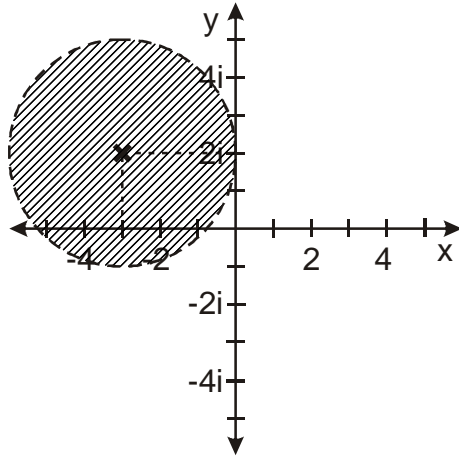
Upravíme výraz tak, aby bylo zřejmé, o jaká čísla jde: $|z - (1 - 2i)| = 2 \Rightarrow$ hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla $1 - 2i$ vzdáleny o 2 \Rightarrow kružnice s poloměrem 2 a se středem v bodě $[1; -2]$.



b) $|z+3-2i| < 3$

V absolutní hodnotě rozdíl dvou komplexních čísel.

Upravíme výraz tak, aby bylo zřejmé o jaká čísla jde $|z - (-3+2i)| < 3 \Rightarrow$ hledáme čísla jejichž obrazy jsou od obrazu čísla $-3+2i$ vzdáleny o méně než tři \Rightarrow vnitřek kružnice s poloměrem 3 a se středem v bodě $[-3; 2]$.



Př. 8: Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která platí:

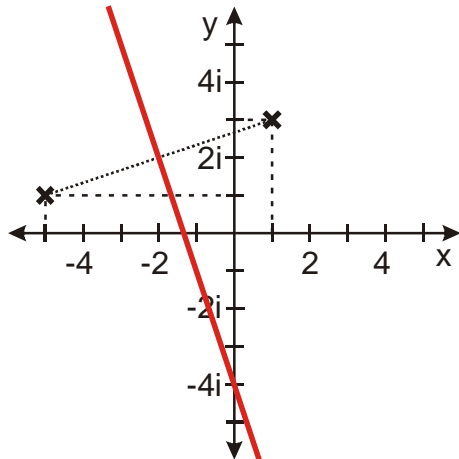
a) $|z-1-3i| = |z+5-i|$

b) $|z+2+5i| \geq |z+4-i|$

a) V rovnosti vystupují dvě absolutní hodnoty:

- $|z-1-3i| = |z-(1+3i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $1+3i$
- $|z+5-i| = |z-(-5+i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $-5+i$

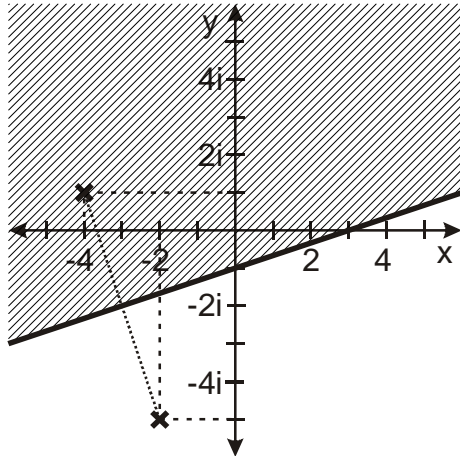
Hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obou čísel stejně daleko \Rightarrow osa úsečky s krajními body $1+3i$ a $-5+i$



b) V nerovnosti vystupují dvě absolutní hodnoty:

- $|z+2+5i| = |z-(-2-5i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $-2-5i$
- $|z+4-i| = |z-(-4+i)|$ = vzdálenost od obrazu čísla $-4+i$

Hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obou čísel stejně daleko \Rightarrow osa úsečky s krajními body $1+3i$ a $-5+i$ a čísla, která jsou blíže k číslu $-4+i$ než k číslu $-2-5i$ \Rightarrow horní část obrázku (přímka obsahuje body, které jsou stejně daleko, část obrázku, ve které leží bod $-4+i$, obsahuje body, které jsou k bodu $-4+i$ blíže)



Př. 9: (BONUS) Nakresli do Gaussovy roviny obrazy všech komplexních čísel, pro která

$$\text{platí } \left| \frac{\bar{z}}{|z|} + |z| \right| = 3.$$

Výraz vlevo nakreslit nedokážeme \Rightarrow zkusíme upravovat.

$$\left| \frac{\bar{z}}{|z|} + |z| \right| = \left| \frac{\bar{z} + |z|^2}{|z|} \right| \quad \text{použijeme } |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$\left| \frac{\bar{z} + |z|^2}{|z|} \right| = \left| \frac{\bar{z} + z \cdot \bar{z}}{|z|} \right| = \left| \frac{\bar{z}(1+z)}{|z|} \right| \quad \text{absolutní hodnotu můžeme podle vzorců rozdělit}$$

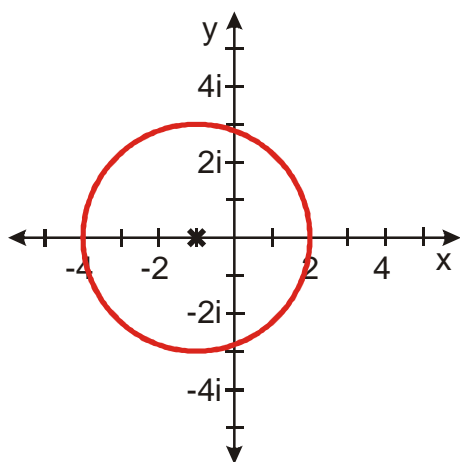
$$\left| \frac{\bar{z}(1+z)}{|z|} \right| = \frac{|\bar{z}| |1+z|}{|z|} \quad \text{platí } |z| = |\bar{z}| \text{ komplexně sdružená čísla se liší pouze ve}$$

znaménku imaginární části \Rightarrow jejich absolutní hodnoty jsou stejné

$$\frac{|\bar{z}|}{|z|} |1+z| = \frac{|z|}{|z|} |1+z| = 1 \cdot |1+z| = |1+z|$$

$$\text{Výsledek: } |1+z| = 3$$

Upravíme: $|z - (-1)| = 3 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou od obrazu čísla $-1+0i$ vzdálena o 3 \Rightarrow kružnice se středem v bodě $[-1; 0]$ a poloměrem 3



Shrnutí: