6.1.7 Řešení rovnic a jejich soustav v komplexním oboru II

Předpoklady: 2715, 6105

Nejdříve opakování z druháku.

Př. 1: Vyřeš rovnici: $a+\sqrt{a^2+3}=3$.

$a+\sqrt{a^2+3}=3 \quad /-a$

$\sqrt{a^2+3}=3-a \quad /^2$

$\left(\sqrt{a^2+3}\right)^2=(3-a)^2$

$a^2+3=9-6a+a^2$

$6a=6$

$a=1$

Zkouška: $L=a+\sqrt{a^2+3}=1+\sqrt{1^2+3}=3$

$P=3$

$L=P \Rightarrow K=\{1\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad dávám jako připomenutí (často na známky) jedné z největších bolestí – správného umocňování rovnic.

Př. 2: Řeš rovnici: $z+|z|=2+i$.

$z+|z|=2+i$

z a $|z|$ jsou úplně jiná čísla: z je komplexní číslo, $|z|$ je reálné $\Rightarrow$ nemůžeme s nimi pracovat stejně $\Rightarrow$ musíme to zařídit tak, aby v rovnici existoval pouze jeden druh čísla $\Rightarrow$ z a $|z|$ napíšeme pomocí reálné a imaginární části: $z=a+bi$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$z+|z|=2+i \Rightarrow a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+i$

Rozdělíme rovnici na reálnou a imaginární část:

$bi=i \Rightarrow b=1$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2$, dosadíme $b=1$

$a+\sqrt{a^2+1^2}=2$

$\sqrt{a^2+1}=2-a \quad /^2$

$a^2+1=4-4a+a^2$

$4a=3$

$a=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow z=\frac{3}{4}+i$ Musíme udělat zkoušku, protože jsme umocňovali:

$$L=z+|z|=\frac{3}{4}+i+\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\frac{3}{4}+i+\sqrt{\frac{9}{16}+1}=\frac{3}{4}+i+\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{3}{4}+i+\frac{5}{4}=2+i$$

$P = 2 + i$

$L = P \Rightarrow \qquad K = \left\{ \frac{3}{4} + i \right\}$

Př. 3: Řeš rovnici: $|z+1| + z = 3 - 2i$.

Stejný fígl jako předtím $z = a + bi$.

$|a + bi + 1| + a + bi = 3 - 2i$

$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} + a + bi = 3 - 2i$

Rozdělíme rovnici na reálnou a imaginární část:

$bi = -2i \Rightarrow b = -2$

$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} + a = 3$, dosadíme $b = -2$

$\sqrt{(a+1)^2 + (-2)^2} + a = 3$

$\sqrt{(a+1)^2 + 4} = 3 - a \qquad /^2$

$(a+1)^2 + 4 = (3-a)^2$

$a^2 + 2a + 1 + 4 = 9 - 6a + a^2$

$8a = 4$

$a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{2} - 2i$

Zkoušku dělat nemusíme, když si uvědomíme, že při umocňování byly obě strany rovnice kladné. $\Rightarrow K = \left\{ \frac{1}{2} - 2i \right\}$

Př. 4: Petáková:
strana 139/cvičení 55 c) d)

Př. 5: Vyřeš rovnici: $z + 2\overline{z} = 3 + 2i$.

Podobný problém i podobné řešení jako v předchozích příkladech.

$z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$

$z + 2\overline{z} = 3 + 2i$

$a + bi + 2(a - bi) = 3 + 2i$

$a + bi + 2a - 2bi = 3 + 2i$

$3a - bi = 3 + 2i$

$-bi = 2i \Rightarrow b = -2$

$3a = 3 \Rightarrow a = 1$

$z = 1 - 2i \qquad K = \{1 - 2i\}$

Př. 6: Petáková:
strana 139/cvičení 53 c) d)

Shrnutí: Při řešení rovnic obsahujících absolutní hodnotu nebo komplexně sdružené číslo použijeme dosazení $z = a + bi$ a rozdělení rovnice na reálnou a imaginární část.