

6.1.5 Absolutní hodnota komplexního čísla

Předpoklady: 6104

Absolutní hodnota reálného čísla: $|x| = \sqrt{x^2} \geq 0$

- vždy nezáporné číslo
- vzdálenost na číselné ose od počátku

Jak zavést absolutní hodnotu v komplexních číslech?

Udělat nezáporné číslo z komplexního čísla už umíme: $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Je to ono?

Zkusíme na $z = a + 0i$:

- Vyrobíme ji komplexně: $z \cdot \bar{z} = (a + 0i)(a - 0i) = a^2$
- Vyrobíme ji reálně: $\sqrt{a^2}$

\Rightarrow abychom dostali stejný výsledek, musíme výraz $z \cdot \bar{z}$ odmocnit (půjde to bez problémů, protože jde o reálné číslo) \Rightarrow

Absolutní hodnota komplexního čísla z je číslo $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$|-2 + i|$: reálná část $a = -2$, imaginární část $b = 1 \Rightarrow |-2 + i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Př. 1: Urči absolutní hodnotu z komplexních čísel:

a) $2 + 3i$

b) $2 - 3i$

c) $-1 - i2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{7} - i\sqrt{6}$

a) $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

c) $|-1 - i2\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$

d) $|\sqrt{7} - i\sqrt{6}| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{13}$

\Rightarrow Několik naprosto odlišných komplexních čísel má stejnou absolutní hodnotou \Rightarrow komplexních čísel s absolutní hodnotou $\sqrt{13}$ je zřejmě nekonečně mnoho \Rightarrow komplexní čísla asi nepůjde uspořádat podle velikosti.

Pedagogická poznámka: Existuje poměrně značné množství studentů, kteří berou imaginární jednotku jako součást imaginární části komplexního čísla, do vzorce dosazují takto

$$|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + (3i)^2} = \sqrt{4 + 9i^2} = \sqrt{4 - 9} = \sqrt{-5} \text{ a pak křičí: „Kde chyba?“}$$

Nezbývá než opakovat, že imaginární část je pouze to, co je před i . Tento příklad jak každopádně dobré místo na jejich odchycení.

Př. 2: Najdi alespoň tři další komplexní čísla z taková, aby platilo $|z| = \sqrt{13}$.

Hledáme taková čísla, aby součet jejich druhých mocnin byl roven 13.

$$\Rightarrow 13 = 8 + 5$$

$$z = 2\sqrt{2} - i\sqrt{5} \text{ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)}$$

$$\Rightarrow 13 = 2 + 11$$

$$z = \sqrt{2} - i\sqrt{11} \text{ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)}$$

$$\Rightarrow 13 = 10 + 3$$

$$z = \sqrt{10} + i\sqrt{3} \text{ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)}$$

Př. 3: Vypočti:

$$\text{a) } \left| (\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) \right| \qquad \text{b) } \left| \frac{2+2i}{1-i} \right|$$

a)

$$\begin{aligned} \left| (\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) \right| &= \left| \sqrt{6} + 2i - i\sqrt{3} - i^2\sqrt{2} \right| = \left| \sqrt{6} + \sqrt{2} + (2 - \sqrt{3})i \right| = \\ &= \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{6 + 2\sqrt{12} + 2 + 4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{15 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

b)

$$\left| \frac{2+2i}{1-i} \right| = \left| \frac{2+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \right| = \left| \frac{2+2i+2i+2i^2}{1+1} \right| = \left| \frac{4i}{2} \right| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Předchozí výpočty mohou značně zjednodušit vzorce pro výpočet absolutní hodnoty.

• Pro libovolná komplexní čísla z_1, z_2 platí: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

• Pro libovolná komplexní čísla $z_1, z_2 \neq 0$ platí: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Př. 4: Vypočti s využitím vzorců pro výpočet absolutní hodnoty:

$$\text{a) } \left| (\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + \sqrt{2}i) \right| \qquad \text{b) } \left| \frac{2+2i}{1-i} \right| \qquad \text{c) } \left| \frac{2i+|1+2i|}{|1+i|i+2} \right|$$

a)

$$\left| (\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + \sqrt{2}i) \right| = \left| \sqrt{2} - i \right| \left| \sqrt{3} + \sqrt{2}i \right| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

b)

$$\left| \frac{2+2i}{1-i} \right| = \frac{|2+2i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

c)

$$\frac{|2i + |1 + 2i||}{|1 + i||i + 2|} = \frac{|2i + \sqrt{1^2 + 2^2}|}{|\sqrt{1^2 + 1^2}i + 2|} = \frac{|\sqrt{5} + 2i|}{|2 + i\sqrt{2}|} = \frac{|\sqrt{5} + 2i|}{|2 + i\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Př. 5: Petáková:

strana 136/cvičení 22 c) d)

strana 136/cvičení 23 c) e) f)

strana 136/cvičení 24 a)

Př. 6: (BONUS) Dokaž pravidla pro výpočet absolutní hodnoty.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 z_2) \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \sqrt{\frac{z_1 \cdot \overline{z_1}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}} = \sqrt{\frac{z_1 \cdot \overline{z_1}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}} = \sqrt{\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_2 \overline{z_2}}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Př. 7: Vypočti:

a) $|i|$

b) $\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right|$

c) $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right|$

d) $\left| \frac{1 + 2i}{2 + i} \right|$

a) $|i| = \sqrt{1^2} = 1$

b) $\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

c) $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

d) $\left| \frac{1 + 2i}{2 + i} \right| = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

Absolutní hodnota všech čísel se rovnala 1 \Rightarrow říkáme jim komplexní jednotky.

Komplexní jednotka je takové komplexní číslo, jehož absolutní hodnota se rovná jedné.

Př. 8: Petáková:

strana 136/cvičení 26 c) f)

strana 136/cvičení 28

strana 136/cvičení 29 a)

Př. 9: Urči, pro která reálná čísla a je komplexní číslo $\frac{-2-a+ia}{1+ia}$ číslo:

- a) reálné b) imaginární c) ryze imaginární

Musíme upravit zlomek do algebraického tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{-2-a+ia}{1+ia} &= \frac{-2-a+ia}{1+ia} \cdot \frac{1-ia}{1-ia} = \frac{-2-a+ia+2ia+ia^2-i^2a^2}{1-i^2a^2} = \frac{-2-a+a^2+3ia^2-ia}{1+a^2} = \\ &= \frac{-2-a+a^2}{1+a^2} + \frac{a^2+3a}{1+a^2}i\end{aligned}$$

a) reálné číslo \Rightarrow imaginární část se rovná nule $\Rightarrow a^2+3a = a(a+3) = 0$

$$a_1 = 0, a_2 = -3$$

b) imaginární číslo \Rightarrow imaginární část není nulová $\Rightarrow a \in R - \{-3; 0\}$

c) ryze imaginární číslo \Rightarrow reálná část je nulová $\Rightarrow a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0$

$$a_3 = -1, a_4 = 2$$

Př. 10: Petáková:

strana 134/cvičení 7

strana 134/cvičení 9

Shrnutí: