

6.1.1 Zavedení komplexních čísel

Předpoklady: 2506

Vzpomínka z dávných časů: některé kvadratické rovnice nemají řešení v množině reálných čísel (neexistuje reálné číslo, pro které rovnice vyjde).

Například: $x^2 + 1 = 0$.

Proč nejde vyřešit?

Neexistuje reálné číslo, které by po umocnění na druhou bylo záporné, tedy ani rovno -1 .

$2^2 = 4$, $(-1)^2 = 1$, $0^2 = 0$. Asi se s tím nedá nic dělat.

Ale to není matematický přístup. **Když číslo nemáme, prostě si ho vymyslíme.**

Předpokládáme, že existuje číslo (označíme ho i), pro které platí: $i^2 = -1$.

Zkusíme dosadit do rovnice $x^2 + 1 = 0$ nově vymyšlené číslo $x = i$:

$x^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. Vyšlo to, máme řešení.

To je sice hezké, ale co si pod i představit?

To je trochu problém. Není moc možností. Jediné, co můžeme říct, že i je číslo, které samo o sobě moc neznamená, **nemá předobraz v realitě a nezavádíme ho proto, abychom dokázali zachytit něco existujícího okolo nás. Číslo i jsme si vymysleli, abychom mohli řešit rovnici $x^2 + 1 = 0$ a jeho základní vlastností je rovnost $i^2 = -1$. Další význam čísla i nemáme, rovnost $i^2 = -1$ nám musí stačit.**

Pedagogická poznámka: Studenti často mají pocit, že by číslo i mělo něco znamenat („Ukaž mi ho.“). Nemá cenu diskuse příliš prodlužovat. Lepší je na rovinu říct, že neznamená nic konkrétního a jediné, o co se mohou opírat, je rovnost $i^2 = -1$.

Př. 1: Existuje ještě další řešení rovnice $x^2 + 1 = 0$, kromě řešení $x = i$? Pokud ano, ověř odhad dosazením do rovnice.

Za předpokladu, že se s i dá počítat stejně jako s reálným číslem, platí i $x = -i$.

$$x^2 + 1 = (-i)^2 + 1 = (-1)^2 (i)^2 + 1 = 1 \cdot (-1) + 1 = 0$$

Zavádět nové číslo kvůli jediné rovnici by bylo trochu zbytečné. Zkusíme, zda by pomocí i šlo vyřešit i jiné rovnice.

Př. 2: Využij číslo i pro nalezení kořenů rovnice $x^2 + 4 = 0$. Proveď zkoušku.

Hledáme číslo, pro které platí: $x^2 = -4$.

Nápad: $x = 2i$ (2 zajistí po umocnění 4 , i zajistí mínus).

$$\text{Zkouška: } x^2 + 4 = (2i)^2 + 4 = 2^2 i^2 + 4 = 4(-1) + 4 = 0$$

Zřejmě také $x = -2i$

Zkouška: $x^2 + 4 = (-2i)^2 + 4 = (-2)^2 i^2 + 4 = 4(-1) + 4 = 0$

\Rightarrow Dokážeme vyřešit všechny rovnice typu $x^2 + a = 0$, kde $a > 0$.

\Rightarrow Zkusíme něco těžšího, třeba rovnici $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Použijeme starý dobrý vzorec:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

\Rightarrow záporný diskriminant \Rightarrow rovnice nemá v R řešení \Rightarrow zkusíme řešit použitím čísla i .

Rovnici $x^2 - 2x + 10 = 0$ zkusíme převést na rovnici $y^2 + a = 0$ (to už umíme).

$$x^2 - 2x + 10 = x^2 - 2x + 1 + 9 = (x - 1)^2 + 9 = 0$$

Substitute: $y = x - 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + 9 = y^2 + 9 = 0$

Zřejmě platí: $y_1 = 3i$, $y_2 = -3i$.

Návrat k původní proměnné:

- $y_1 = x_1 - 1 = 3i \Rightarrow x_1 = 1 + 3i$
- $y_2 = x_2 - 1 = -3i \Rightarrow x_2 = 1 - 3i$

Pedagogická poznámka: Na nápad se substitucí většina studentů samozřejmě nepřijde, je třeba jim poměrně brzo poradit.

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou spíše než k obhajování komplexních čísel určeny k tomu, aby s nimi studenti začali počítat i přesto, že korektní zavedení operací s komplexními čísly přijde až příští hodinu.

Př. 4: Ověř dosazením, že výrazy $1 + 3i$ a $1 - 3i$ jsou řešením rovnice $x^2 - 2x + 10 = 0$.

$$x_1 = 1 + 3i$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 10 &= (1 + 3i)(1 + 3i) - 2(1 + 3i) + 10 = (1 + 3i + 3i + 9i^2) - 2 - 6i + 10 = \\ &= 1 + 9(-1) - 2 + 10 = 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = 1 - 3i$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 10 &= (1 - 3i)(1 - 3i) - 2(1 - 3i) + 10 = (1 - 3i - 3i + 9i^2) - 2 + 6i + 10 = \\ &= 1 + 9(-1) - 2 + 10 = 0 \end{aligned}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $x^2 + 4x + 5 = 0$ podobným způsobem jako předchozí příklad. Proveď zkoušku.

$x^2 + 4x + 5 = 0$, zkusíme převést na rovnici $y^2 + a = 0$ (to už umíme).

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 5 = (x + 2)^2 + 1 = 0$$

Substitute: $y = x + 2 \Rightarrow (x + 2)^2 + 1 = y^2 + 1 = 0$

Zřejmě platí: $y_1 = i$, $y_2 = -i$.

Návrat k původní proměnné:

- $y_1 = x_1 + 2 = i \Rightarrow x_1 = -2 + i$
- $y_2 = x_2 + 2 = -i \Rightarrow x_2 = -2 - i$

Zkouška:

$$x_1 = -2 + i$$

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + 5 &= (-2 + i)(-2 + i) + 4(-2 + i) + 5 = (4 - 2i - 2i + i^2) - 8 + 4i + 5 = \\ &= 4 + (-1) - 8 + 5 = 0\end{aligned}$$

$$x_2 = -2 - i$$

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + 5 &= (-2 - i)(-2 - i) + 4(-2 - i) + 5 = (4 + 2i + 2i + (-i)^2) - 8 - 4i + 5 = \\ &= 4 + (-1) - 8 + 5 = 0\end{aligned}$$

Př. 6: (BONUS) Vyřeš pomocí předcházejícího postupu rovnici $9x^2 - 6x + 5 = 0$.

$9x^2 - 6x + 5 = 0$, zkusíme převést na rovnici $y^2 + a = 0$ (to už umíme).

$$9x^2 - 6x + 5 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 + 4 = (3x - 1)^2 + 4 = 0$$

Substituce: $y = 3x - 1 \Rightarrow (3x - 1)^2 + 4 = y^2 + 4 = 0$

Zřejmě platí: $y_1 = 2i$, $y_2 = -2i$.

Návrat k původní proměnné:

- $y_1 = 3x_1 - 1 = 2i \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$
- $y_2 = 3x_2 - 1 = -2i \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

Př. 7: Ověř dosazením, že výrazy $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ a $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$ můžeme považovat za řešení rovnice

$$9x^2 - 6x + 5 = 0.$$

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\begin{aligned}9x^2 - 6x + 5 &= 9\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right) - 6\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right) + 5 = 9\left(\frac{1}{9} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3}i + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3}i + \frac{4}{9}i^2\right) - 2 - 4i + 5 = \\ &= 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 = 0\end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$$

$$\begin{aligned}9x^2 - 6x + 5 &= 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right) - 6\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right) + 5 = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3}i - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3}i + \frac{4}{9}i^2\right) - 2 + 4i + 5 = \\ &= 1 - 4i - 4 - 2 + 4i + 5 = 0\end{aligned}$$

\Rightarrow Zdá se, že s pomocí čísla i ($i^2 = -1$) vyřešíme všechny dosud neřešitelné kvadratické rovnice.

Naše výsledky: $\pm i$, $\pm 2i$, $1 \pm 3i$, $-2 \pm i$, $\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}i$ nazveme **komplexní čísla**.

Komplexním číslem nazýváme výraz ve tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla a i je číslo, pro něž platí $i^2 = -1$.

V komplexním čísle $a + bi$ se nazývá:

číslo a reálná část

číslo b imaginární část

číslo i imaginární jednotka.

Množinu komplexních čísel značíme $C (\mathbb{C})$, komplexní číslo většinou z .

Zápis komplexního čísla z ve tvaru $a + bi$ nazýváme **algebraický tvar komplexního čísla**.

Shrnutí: Když si vymyslíme číslo i takové, že platí $i^2 = -1$, dokážeme vyřešit dosud neřešitelné kvadratické rovnice.