

5.2.7 Odchylka přímky a roviny

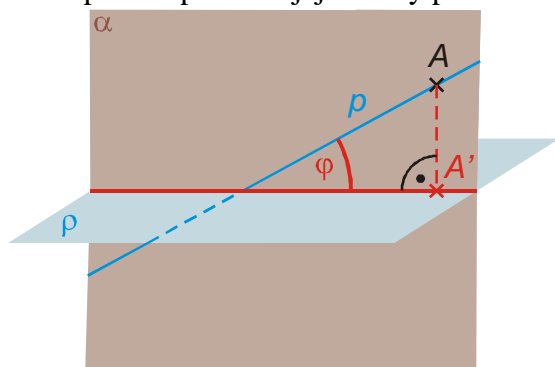
Předpoklady: 5202, 5206

Jak odchylka přímky a roviny?

Co by měla definice splňovat:

- podobně jako u ostatních věcí ji musíme převést na něco co už umíme (asi odchylku dvou přímek),
- měla by být jednoznačná,
- měla by dávat očekávané výsledku u „jasných“ případů (přímka rovnoběžná a kolmá k rovině).

⇒ K přímce přidáme její kolmý průmět do roviny a určíme odchylku těchto přímek.



Selže někdy tento postup?

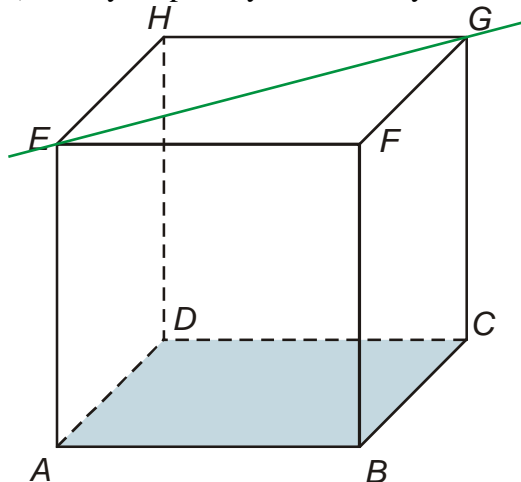
Když je přímka kolmá k rovině, jejím průmětem je pouze bod ⇒ nepůjde to spočítat přes odchylku přímek ⇒ odchylku musíme stanovit přímo.

Není-li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny.
Je-li přímka kolmá k rovině, je její odchylka 90° .

Př. 1: Je dána standardní krychle $ABDCEFGH$. Urči odchylku:

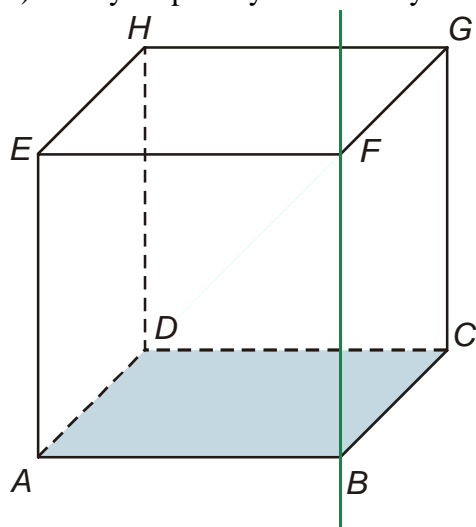
- a) přímky EG a roviny ABC ,
- b) přímky FB a roviny ABC ,
- c) přímky AF a roviny ABC .

a) Odchylka přímky EG a roviny ABC .



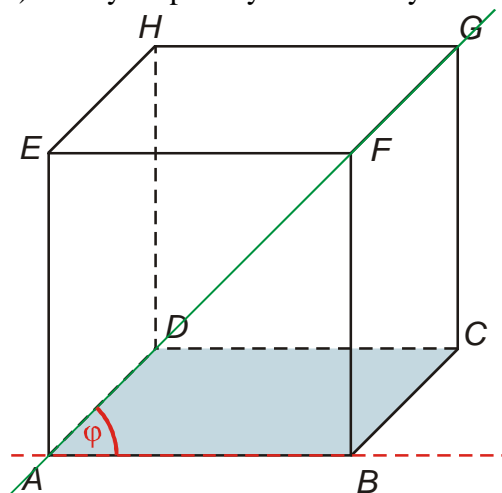
Přímka EG leží v rovině AFG , která je rovnoběžná s rovinou ABC ⇒ přímka EG je rovnoběžná s rovinou ABC ⇒ odchylka přímky EG od roviny ABC je 0° .

b) Odchylka přímky FB a roviny ABC .



Přímka FB je kolmá k rovině \Rightarrow odchylka přímky FB od roviny ABC je 90° .

c) Odchylka přímky AF a roviny ABC .



Kolmým průmětem přímka AB do roviny ABC je přímka $AB \Rightarrow$ odchylka přímek AF a AB je $45^\circ \Rightarrow$ odchylka přímky AF od roviny ABC je 45° .

Pedagogická poznámka: Všechny body předchozího příkladu by studenti měli vyřešit z paměti bez pomoci obrázků.

Odchylka přímky od roviny (tedy odchylka přímky od jejího kolmého průmětu do této roviny) je rovna nejmenší odchylce přímky od libovolné přímky v rovině.

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámku je dobré demonstrovat pomocí modelu v Carbi3D.

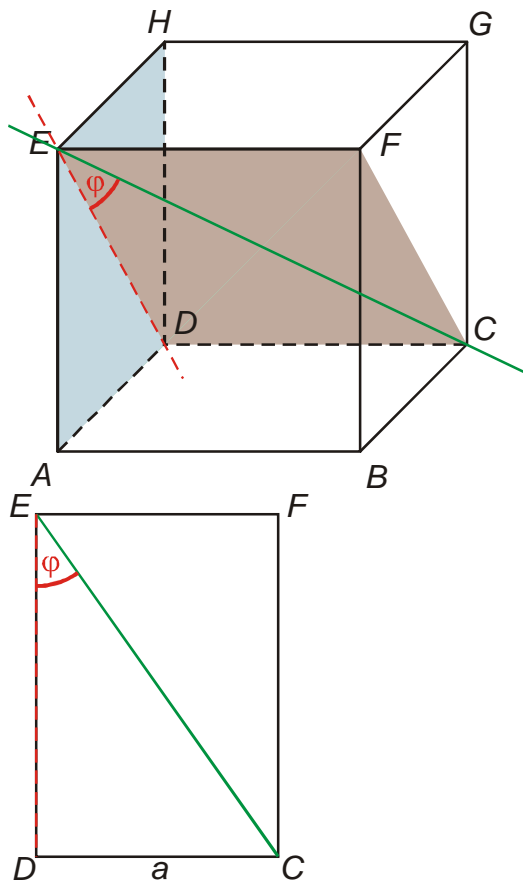
Př. 2: Je dána standardní krychle $ABDCEFGH$. Urči odchylku:

a) přímky EC roviny ADE ,

b) přímky $S_{AE}S_{FG}$ a roviny CDG ,

c) přímky $S_{AC}F$ a roviny ABE .

a) Odchylka přímky EC a roviny ADE .



Kolmým průmětem přímky EC do roviny ADE je přímka $ED \Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku $CDEF$.

Velikost úhlu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku EDC : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{|DC|}{|DE|}$.

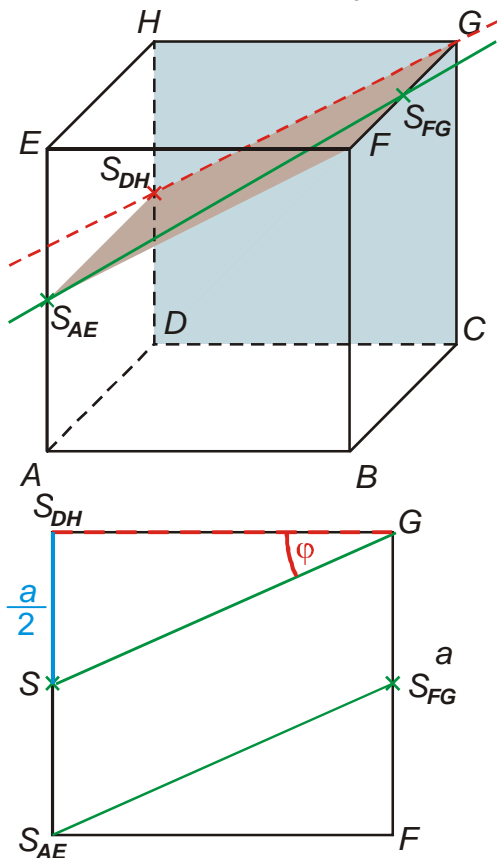
Velikost strany $|ED|$ (úhlopříčka čtverce):

$$|ED| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|DC|}{|DE|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 35^\circ 16'$$

Odchylka přímky EC a roviny ADE se rovná $35^\circ 16'$.

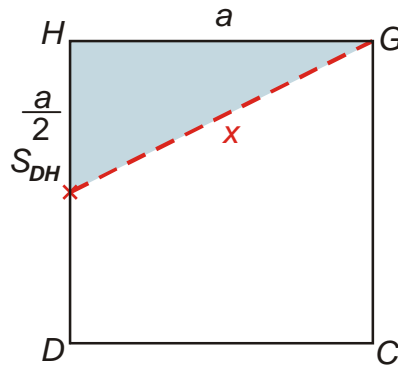
b) Odchylka přímky $S_{AE}S_{FG}$ a roviny CDG .



Kolmým průmětem přímky $S_{AE}S_{FG}$ do roviny CDG je přímka $S_{DH}G \Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku $S_{AE}FGS_{DH}$.

Velikost strany $|S_{DH}G|$ ze čtverce CDG :

Velikost úhlu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku $SS_{DH}G$: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{|SS_{DH}|}{|S_{DH}G|}$.



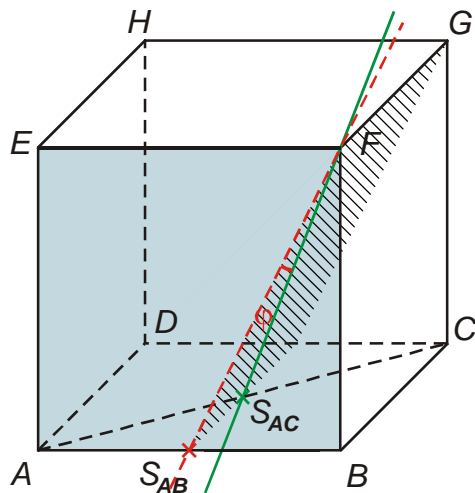
$$|S_{DH}G| = \sqrt{|S_{DH}H|^2 + |HG|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + 4a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{5}}{2}$$

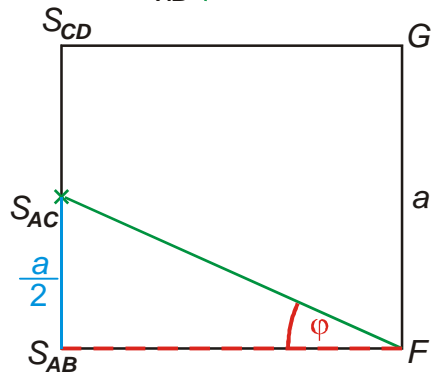
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 24^\circ 6'$$

Odchylka přímky $S_{AE}S_{FG}$ a roviny CDG se rovná $24^\circ 6'$.

b) Odchylka přímky $S_{AC}F$ a roviny ABE .



Kolmým průmětem přímky $S_{AC}F$ do roviny ABE je přímka $S_{AB}F \Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku $S_{AB}FGS_{CD}$.

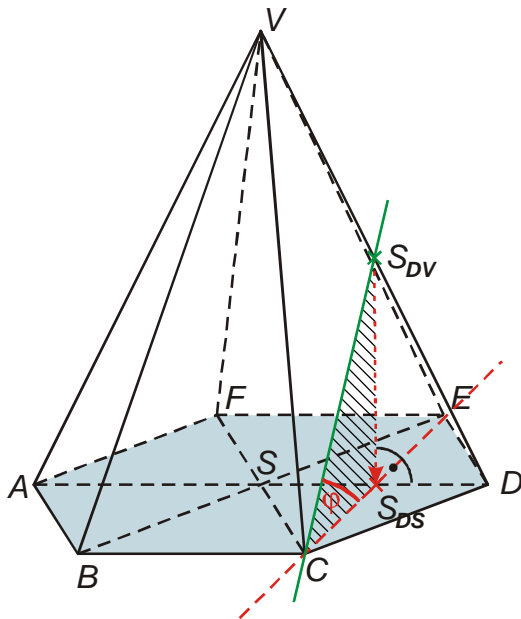


Velikost úhlu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku $SS_{DH}G$: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{|SS_{DH}|}{|S_{DH}G|}$.

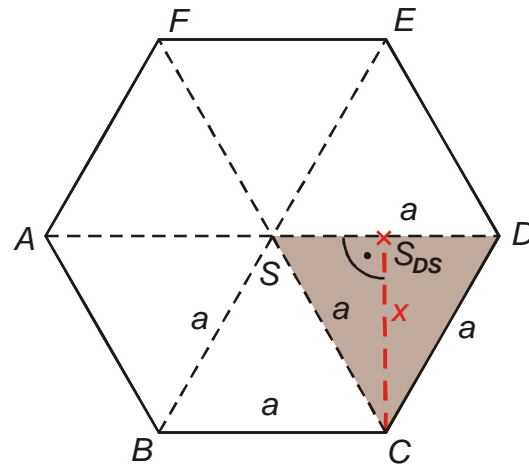
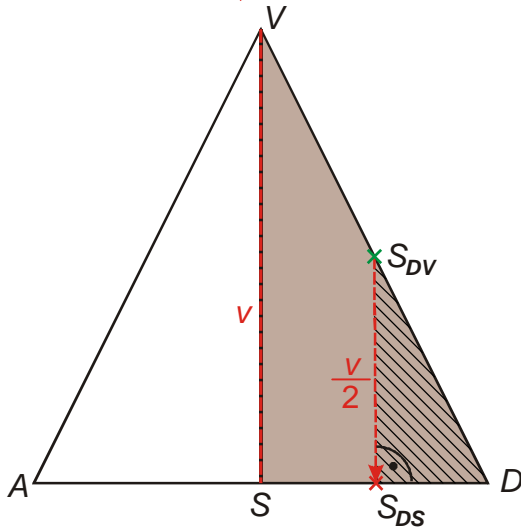
Stejná situace jako v předchozím bodě $\Rightarrow \varphi = 24^\circ 6'$.

Odchylka přímky $S_{AC}F$ a roviny ABE se rovná $24^\circ 6'$.

Př. 3: Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, se středem podstavy S . Platí: $|AB| = a = 3 \text{ cm}$, $|SV| = v = 5 \text{ cm}$. Urči odchylku přímky CS_{DV} a roviny ABC .



Kolmým průmětem přímky $S_{DV}C$ do roviny ABC je přímka CS_{DS} (S je střed šestiúhelníku $ABCDEF$, kolmým průmětem úsečky DV je úsečka DS) \Rightarrow odchylku určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku $CS_{DS}S_{DV}$.

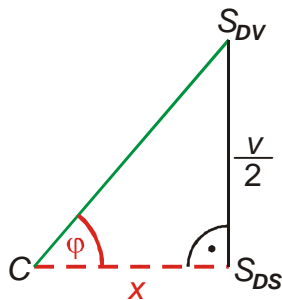


Z podobnosti trojúhelníků DSV a $DS_{DS}S_{DV}$

je vidět, že platí: $|S_{DV}S_{DS}| = \frac{v}{2}$.

Vzdálenost CS_{DS} je také výškou v rovnostranném trojúhelníku se stranou a .

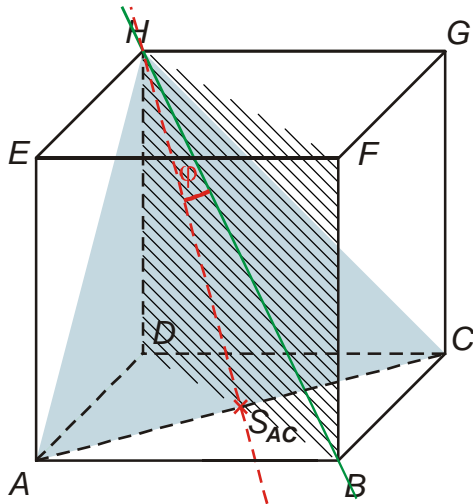
$$x^2 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



$$\text{tg } \varphi = \frac{|S_{DV}S_{DS}|}{|S_{DS}C|} = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{v}{a\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 43^\circ 54'$$

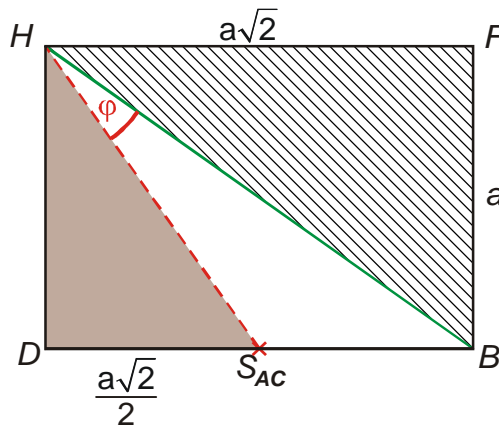
Odchylka CS_{DV} a roviny ABC se rovná $43^\circ 54'$.

Př. 4: Je dána standardní krychle $ABDCEFGH$. Urči odchylku přímky BH a roviny ACH .



Kolmým průmětem přímky BH do roviny ACH je přímka $S_{AC}H \Rightarrow$ odchylku určíme pomocí obdélníku $BFHD$.

Velikost úhlu φ můžeme spočítat pomocí kosinové věty z trojúhelníku $S_{AC}BH$ (trojúhelník nemá viditelné speciální vlastnosti \Rightarrow musíme určit délky všech tří stran).



$$|S_{AC}B| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (polovina úhlopříčky podstavy)}$$

$$|S_{AC}H|: \text{ přepona v pravoúhlém trojúhelníku } S_{AC}DH$$

$$|S_{AC}H|^2 = |DS_{AC}|^2 + |DH|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{2a^2}{4} + a^2$$

$$|S_{AC}H| = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$|BH|: \text{ přepona v pravoúhlém trojúhelníku } BFH$$

$$|BH|^2 = |BF|^2 + |FH|^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = a^2 + 2a^2$$

$$|BH| = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Kosinová věta: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos \varphi = \frac{|S_{AC}H|^2 + |BH|^2 - |S_{AC}B|^2}{2|S_{AC}H||BH|} = \frac{\left(a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2 - \left(a \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \left(a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \cdot (a\sqrt{3})} = \frac{a^2 \left(\frac{3}{2} + 3 - \frac{1}{2}\right)}{2a^2 \frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{6}$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \varphi = 19^\circ 28'$$

Odchylka přímky BH a roviny ACH se rovná $19^\circ 28'$.

Př. 5: Petáková:
strana 94/cvičení 33 a) c) d) h)
strana 94/cvičení 34 b) d)

Shrnutí: Odchylku přímky a roviny určujeme jako odchylku přímky a jejího kolmého průmětu do roviny.