

## 5.2.6 Odchylka rovin

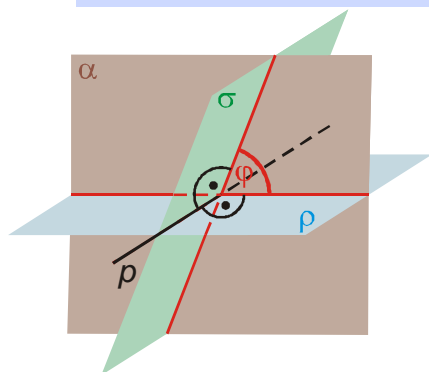
**Předpoklady:** 5204

Odchylku dvou přímek už umíme, jak definovat odchylku dvou rovin?

Co by měla definice splňovat:

- podobně jako u ostatních věcí ji musíme převést na něco co už umíme (asi odchylku přímek),
- měla by být jednoznačná,
- měla by dávat očekávané výsledku u „jasných“ případů (rovnoběžných a kolmých rovin).

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá. Odchylku rovin  $\rho$  a  $\sigma$  píšeme:  $|\sphericalangle\rho\sigma|$ .



Jak najdeme rovinou kolmou na obě roviny?

Hledaná rovina je kolmá na průsečnici obou rovin.

**Př. 1:** Je dána standardní krychle  $ABDCEFGH$ . Urči odchylku rovin.

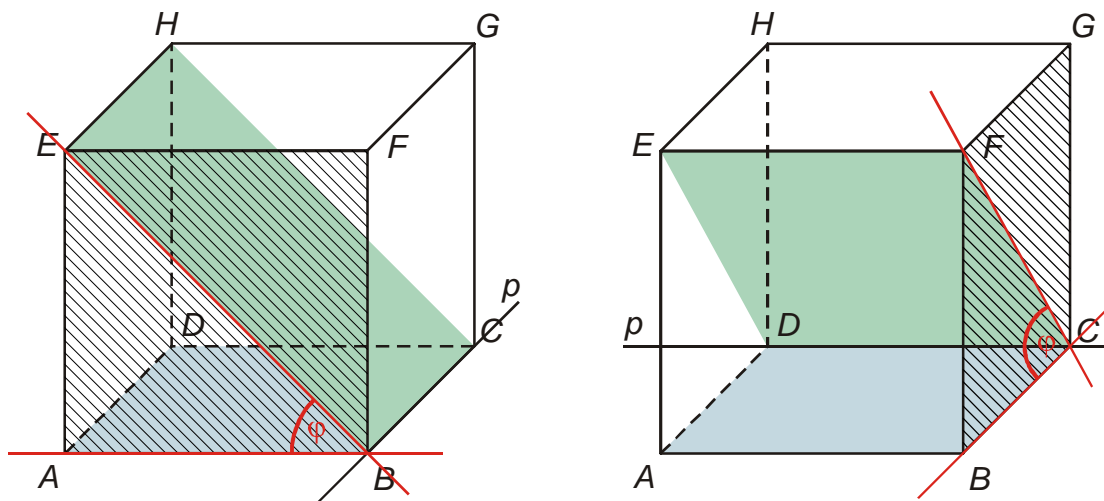
- a)  $BCE, ABC$       b)  $ABC, CDE$       c)  $DFG, ABE$

a)  $BCE, ABC$

Průsečnicí obou rovin je přímka  $BC \Rightarrow$   
pomocnou kolmou rovinou je rovina  $ABE$   
(přední stěna)  $\Rightarrow$  určíme odchylku  
průsečnic  $AB$  a  $BE \Rightarrow \varphi = 45^\circ$ .

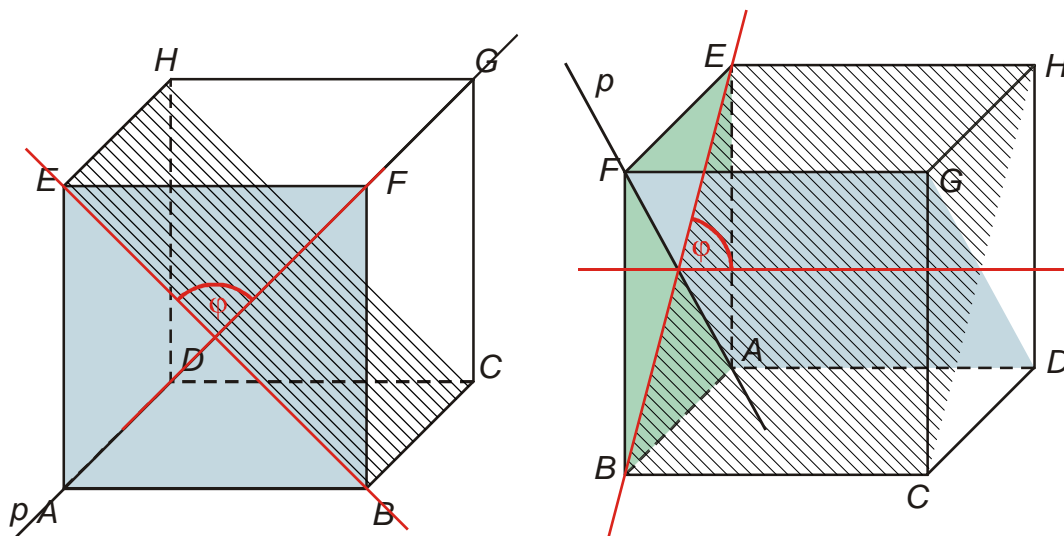
b)  $ABC, CDE$

Průsečnicí obou rovin je přímka  $CD \Rightarrow$   
pomocnou kolmou rovinou je rovina  $BCF$   
(pravá boční stěna)  $\Rightarrow$  určíme odchylku  
průsečnic  $BC$  a  $FC \Rightarrow \varphi = 45^\circ$ .



c)  $DFG, ABE$

Průsečnicí obou rovin je přímka  $AF \Rightarrow$  pomocnou kolmou rovinou je rovina  $BCE \Rightarrow$  určujeme odchylku průsečnic  $BE$  a  $S_{BE}S_{CH} \Rightarrow \varphi = 90^\circ$ .

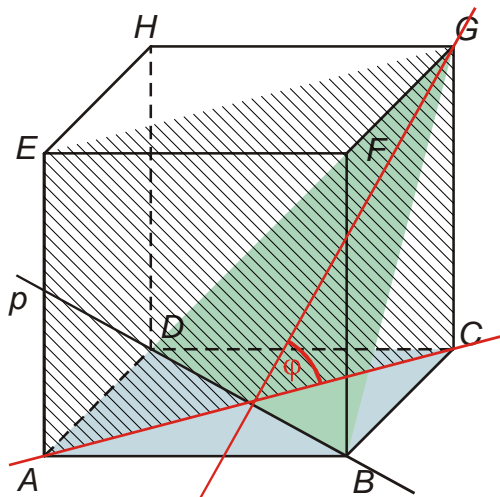


Obrázek v klasické poloze je velmi nepřehledný, stačí jej otočit o  $90^\circ$  a situace je podstatně zřejmější.

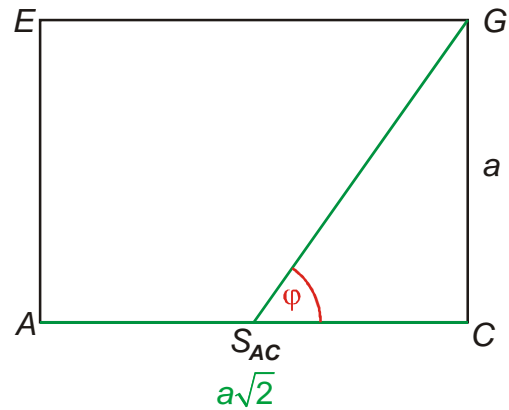
**Pedagogická poznámka:** Studenti by si měli vyzkoušet v bodě c) nakreslit krychli z jiné strany, je to v některých případech až nečekaně účinné.

**Př. 2:** Je dána standardní krychle  $ABDCEFGH$ . Urči odchylku rovin  $BDG$  a  $ABC$ .

Průsečnicí obou rovin je přímka  $BD \Rightarrow$  pomocnou kolmou rovinou je rovina  $BDF \Rightarrow$  určujeme odchylku průsečnic  $AC$  a  $S_{AC}G \Rightarrow$  nakreslíme si situaci v rovině  $ACG$



⇒

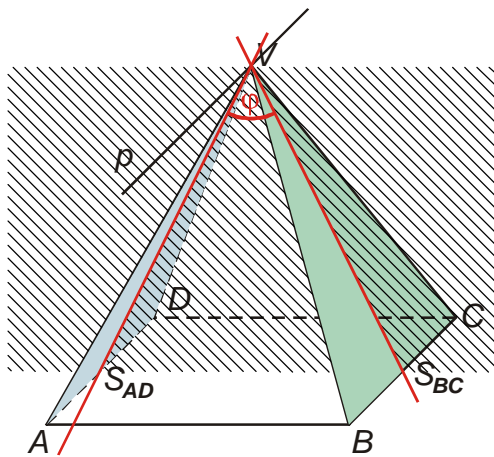


Odchylku spočteme z pravoúhlého trojúhelníku  $S_{AC}CG$  :

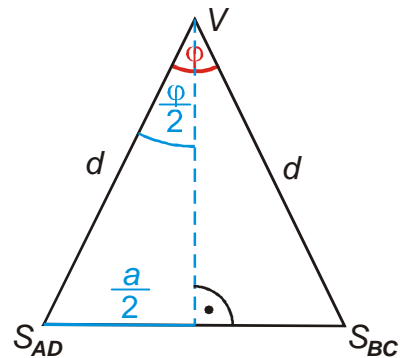
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|CG|}{|S_{AC}C|} = \frac{a}{a \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi = 54^{\circ}44'$$

**Př. 3:** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABDCV$ ;  $|AB| = a = 6 \text{ cm}$ ,  $|AV| = b = 8 \text{ cm}$ . Urči odchylku rovin  $ADV$  a  $BCV$ .

Přísečnicí obou rovin je přímka procházející vrcholem  $V$  rovnoběžná s přímkou  $AB \Rightarrow$  pomocnou kolmou rovinou je rovina  $S_{AD}S_{BC}V \Rightarrow$  určujeme odchylku průsečnic  $S_{AD}V$  a  $S_{BC}V \Rightarrow$  nakreslíme si situaci v rovině  $S_{AD}S_{BC}V$ .



⇒

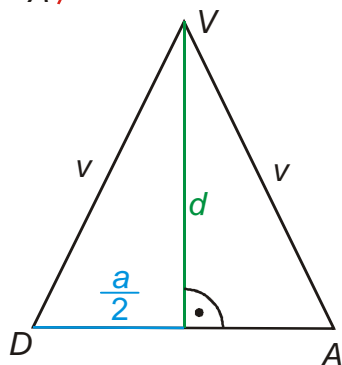


$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{AD}S|}{|S_{AD}V|}$$

Vzdálenost  $S_{AD}V$  určíme z rovnoramenného trojúhelníku  $ADV$ .

$$d^2 = v^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = v^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 - a^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4v^2 - a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4v^2 - a^2}}{2}$$



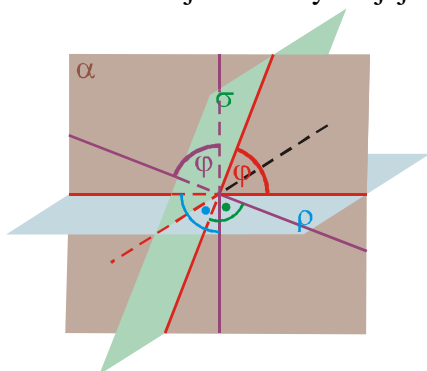
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{AD}S|}{|S_{AD}V|} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{4v^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{4v^2 - a^2}} = \frac{6}{\sqrt{4 \cdot 8^2 - 6^2}} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 23^\circ 51' \Rightarrow \varphi = 47^\circ 43'$$

**Př. 4:** Jdou dány dvě dvojice rovnoběžných rovin  $\rho, \rho'$  a  $\sigma, \sigma'$ . Jaký je vztah odchylek  $|\angle \rho \sigma|$  a  $|\angle \rho' \sigma'|$ ?

Platí:  $|\angle \rho \sigma| = |\angle \rho' \sigma'|$

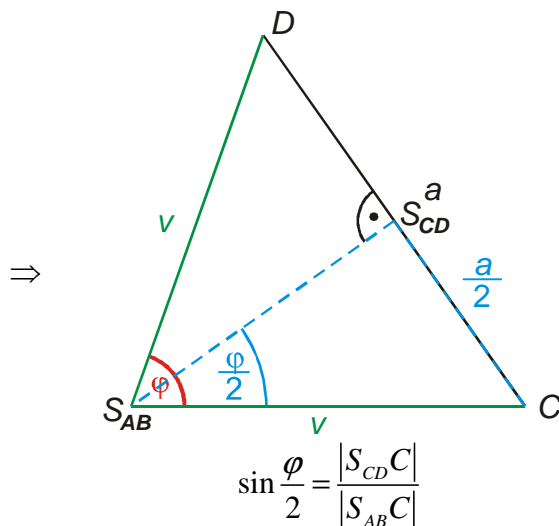
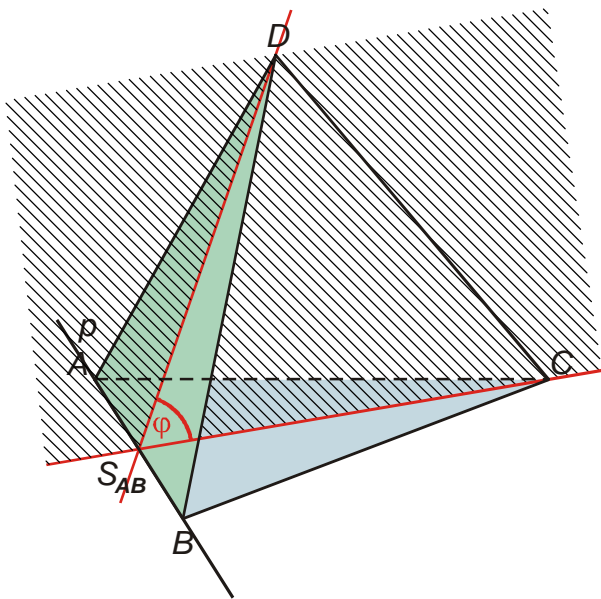
Jak jinak určit odchylku dvou rovin?

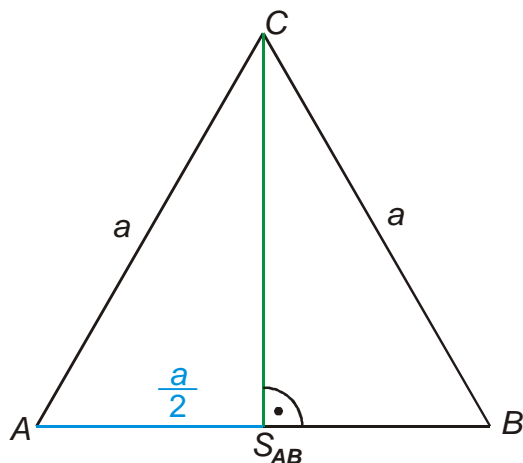
Směr roviny je určen také přímkou, která je k ní kolmá (**normála roviny**)  $\Rightarrow$  odchylku rovin můžeme určit jako odchylku jejich normál.



**Př. 5:** Je dán pravidelný čtyřstěn  $ABCD$ . Urči odchylku stěn  $ABC$  a  $ABD$ .

Přesečnicí obou rovin je přímka  $AB \Rightarrow$  pomocnou kolmou rovinou je rovina  $S_{AB}CD \Rightarrow$  určíme odchylku průsečnic  $S_{AB}D$  a  $S_{AB}C \Rightarrow$  nakreslíme si situaci v trojúhelníku  $S_{AB}CD$ .





Délku výšky určíme z rovnostranného trojúhelníku  $ABC$ .

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{CD}C|}{|S_{AB}C|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 35^\circ 16' \Rightarrow \varphi = 70^\circ 31'$$

**Př. 6:** Petáková:

strana 94/cvičení 37 b)

strana 94/cvičení 35 d) e)

strana 94/cvičení 36 d)

**Shrnutí:** Odchylku rovin určujeme jako odchylku průsečnic pomocnou na obě roviny kolmou rovinou.