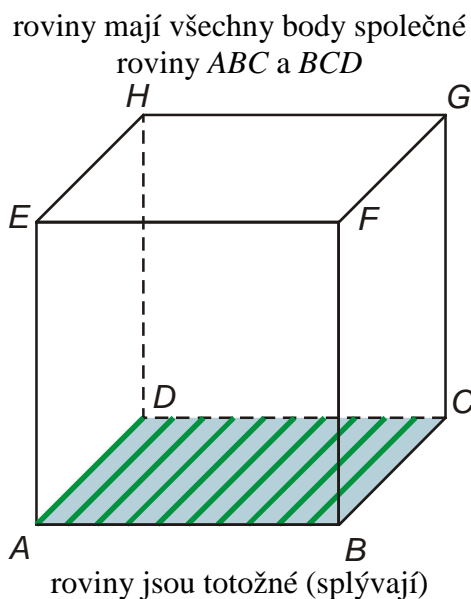
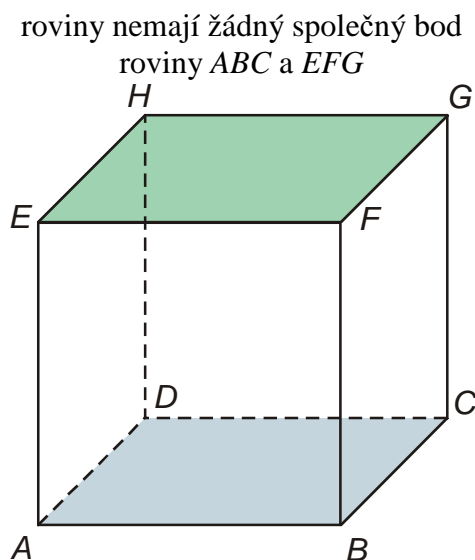


5.1.8 Vzájemná poloha rovin

Předpoklady: 5107

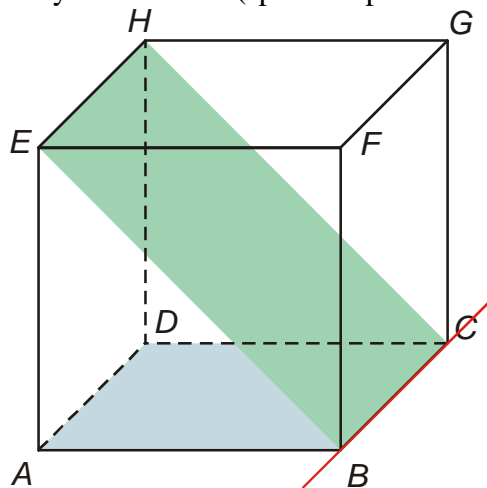
Př. 1: Kolik společných bodů mohou mít dvě roviny? Každou možnost dokumentuj pomocí dvou rovin určených vrcholy krychle a urči vzájemnou polohu rovin.

Mohou nastat tři možnosti:



roviny jsou **rovnoběžné**

roviny mají společných nekonečně mnoho bodů ležících v přímce
roviny ABC a BCE (společná přímka BC)



roviny jsou **různoběžné**

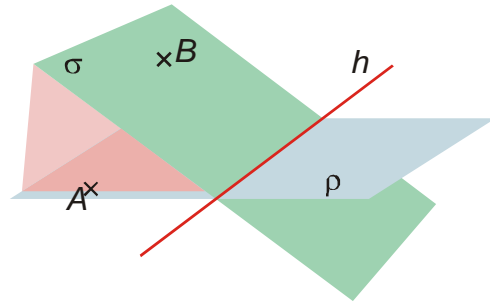
\Rightarrow pokud mají dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem prochází

Terminologie:

máme různoběžné roviny ρ a σ , dva body

$A \in \rho$, $B \in \sigma$

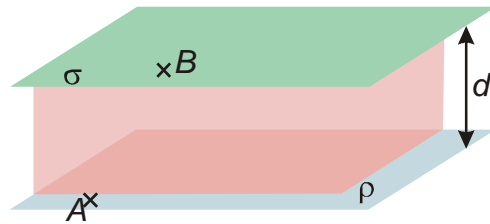
- průnik poloprostorů ρB a σA se nazývá **klín**
- průsečnice h hraničních rovin se nazývá **hrana klínu**
- poloroviny hB a hA se nazývají **stěny klínu**



máme rovnoběžné roviny ρ a σ , dva body

$A \in \rho$, $B \in \sigma$

- průnik poloprostorů ρB a σA se nazývá **vrstva**
- vzdálenost hraničních rovin se nazývá **tloušťka (šířky) vrstvy**

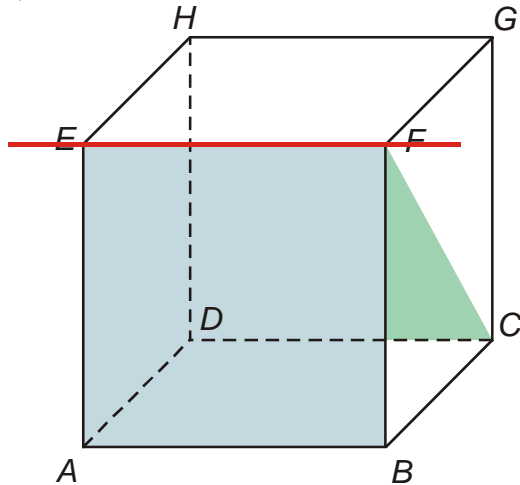


Př. 2: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči vzájemnou polohu rovin:

- a) ABE , CDF b) ABE , DCG c) ABG , DCE d) ABC , $S_{AE}GH$.

Pokud jsou roviny různoběžné, urči jejich průsečnici.

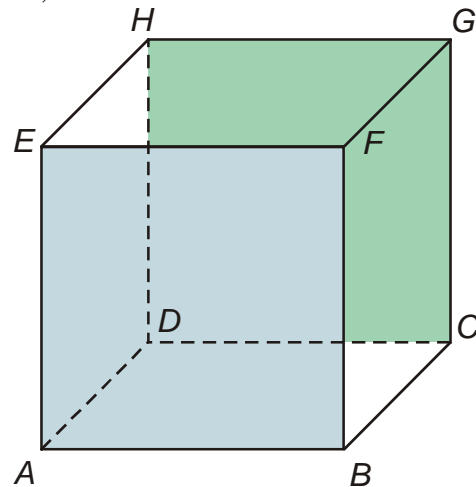
a) ABE , CDF



roviny jsou různoběžné, průsečnicí je přímka EF

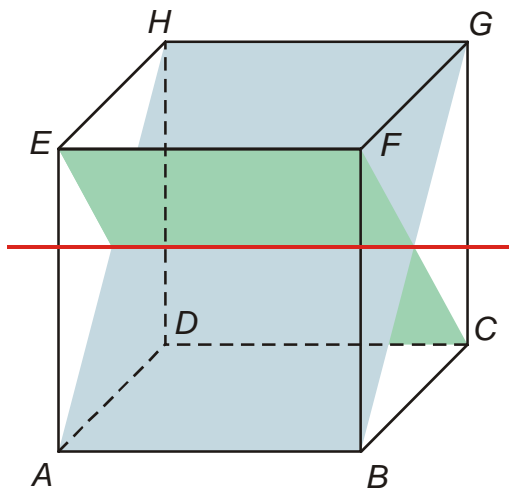
c) ABG , DCE

b) ABE , DCG

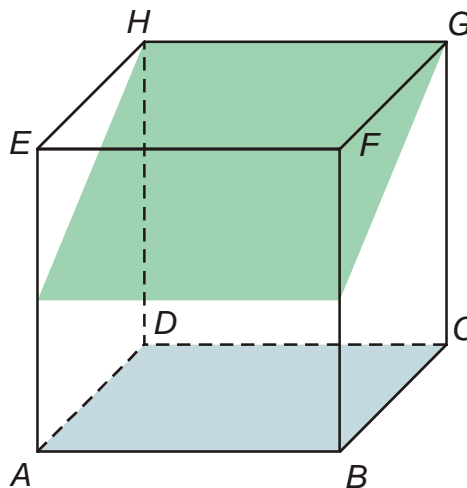


roviny jsou rovnoběžné

d) ABC , $S_{AE}GH$

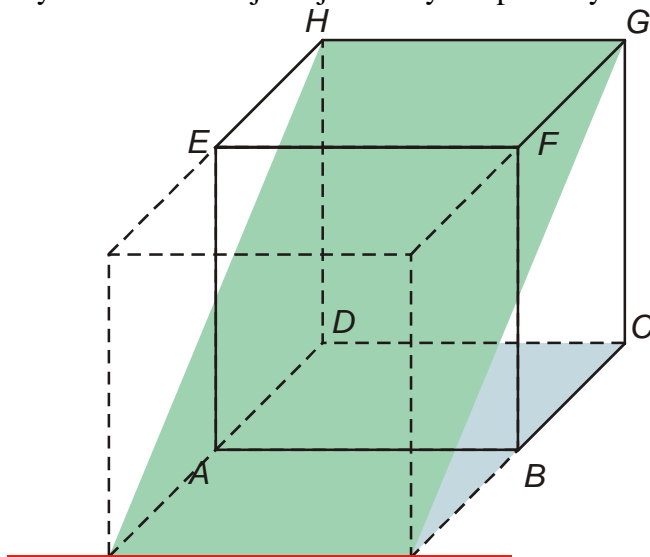


roviny jsou různoběžné, průsečnicí je přímka $S_{BG}S_{AH}$



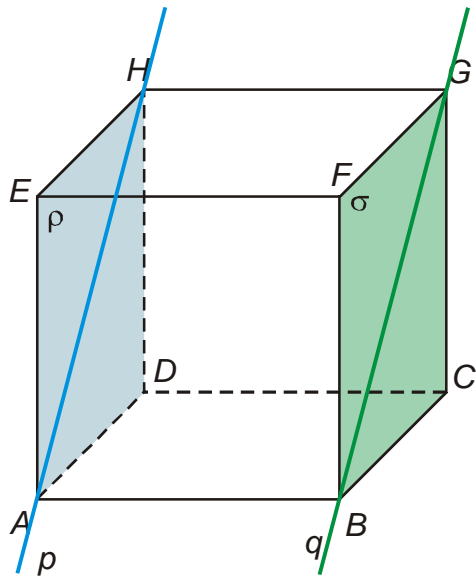
roviny jsou různoběžné, průsečnicí je přímka rovnoběžná s přímkou AB ležící mimo krychli

Dodatek: Průsečnici rovin ABC , $S_{AE}GH$ z bodu d) předchozího příkladu snadno najdeme, když si nakreslíme ještě jednu krychli před krychli $ABCDEFGH$:



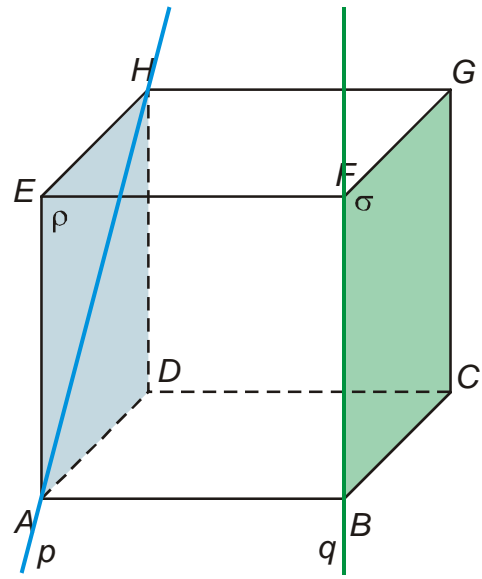
Př. 3: V rovině ρ leží přímka p , v rovině σ leží přímka q . Jaká může být vzájemná poloha přímk p, q , pokud jsou roviny ρ a σ : a) rovnoběžné b) různoběžné.
Modeluj situace pomocí sešitů a tužek. Načrtni obrázky, které jednotlivé možnosti zachycují pomocí rovin a přímk určených vrcholy krychle.

roviny ρ a σ jsou rovnoběžné

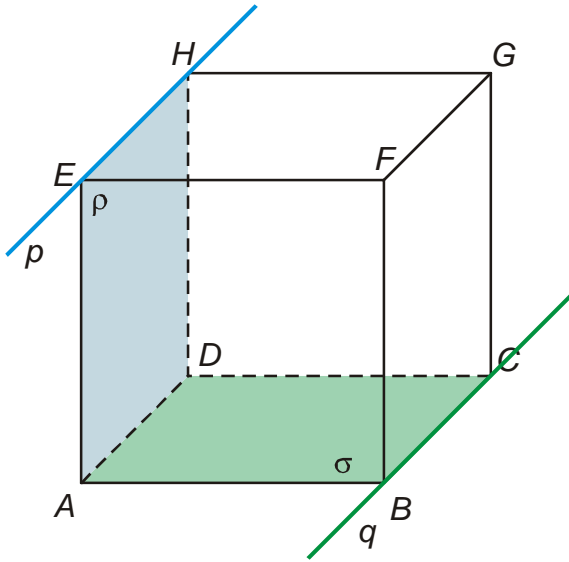


přímky p, q jsou rovnoběžné

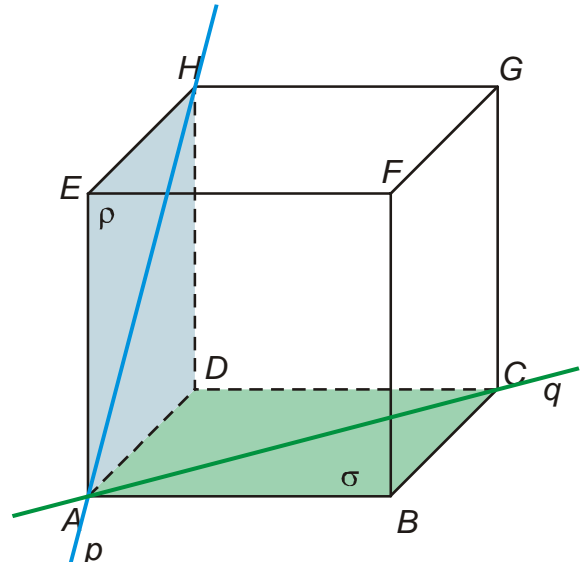
roviny ρ a σ jsou různoběžné



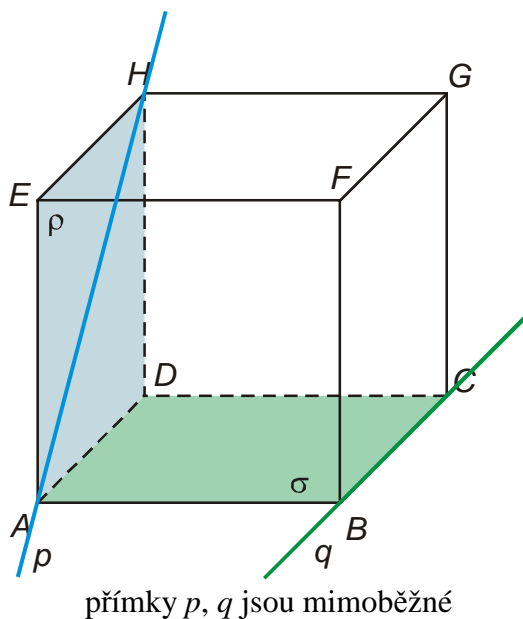
přímky p, q jsou mimoběžné



přímky p, q jsou rovnoběžné



přímky p, q jsou různoběžné



Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu jde mimo jiné i o to, jak si studenti v krychli zvolí roviny ρ a σ . Při špatné volbě není z obrázku nic vidět.

Př. 4: Urči vzájemnou polohu rovin ρ a σ pokud víš, že mají:

- a) jeden společný bod b) společnou přímku
c) společné tři body, které neleží na přímce

a) jeden společný bod

\Rightarrow roviny mají určitě společnou přímku \Rightarrow roviny jsou různoběžné nebo totožné

b) společnou přímku

\Rightarrow roviny jsou různoběžné nebo totožné

c) společné tři body, které neleží na přímce

roviny jsou totožné

Podobně jako pro přímky i pro roviny platí:

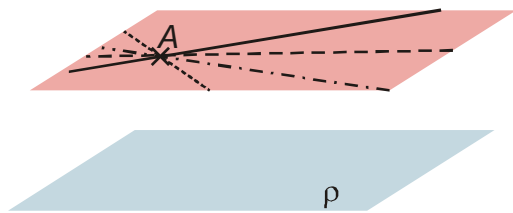
Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

Př. 5: Doplň větu: „Je-li $\rho \parallel \sigma$ a $\sigma \parallel \tau$, pak ...“

Je-li $\rho \parallel \sigma$ a $\sigma \parallel \tau$, pak $\rho \parallel \tau$. \Rightarrow i **rovnoběžnost rovin je tranzitivní.**

Př. 6: Je dána rovina ρ a bod A , který v ní neleží. Kolik přímek rovnoběžných s rovinou ρ prochází bodem A ? Jaký útvar vznikne sjednocením všech takových přímek?

Bodem A prochází nekonečně mnoho přímek rovnoběžných s rovinou ρ , které dohromady tvoří rovinu rovnoběžnou s rovinou ρ .



Př. 7: Najdi postup, jak pomocí vodováhy ověřit vodorovnou polohu desky.

Vodováha – zařízení, které určí zda je nějaký směr vodorovný (bublinka kapaliny je přesně uprostřed okénka). \Rightarrow
 přiložíme vodováhu k desce ve dvou různých směrech a ověříme, zda jsou oba směry vodorovné (každý další už bude také vodorovný).

Př. 8: Na základě předchozích příkladů vyslov kritérium pro rovnoběžnost dvou rovin.

Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s druhou rovinou.

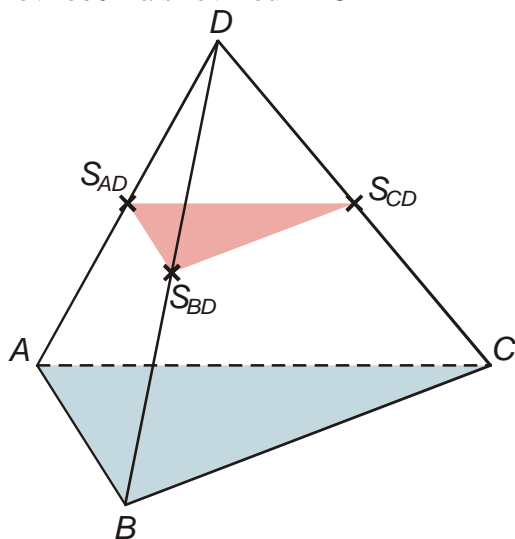
Například pro roviny ρ a σ to znamená, že rovina σ obsahuje přímky p, q , které jsou rovnoběžné s rovinou ρ .

Př. 9: Je dán čtyřstěn $ABCD$. Dokaž, že rovina $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$ je rovnoběžná s rovinou ABC .

Budeme postupovat podle předchozího kritéria: najdeme v rovině $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$ dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s rovinou ABC :

- přímka $S_{AD}S_{BD}$ je střední příčkou v trojúhelníku $ABD \Rightarrow$ je rovnoběžná s přímkou $AB \Rightarrow$ je rovnoběžná s rovinou ABC
- přímka $S_{BD}S_{CD}$ je střední příčkou v trojúhelníku $BCD \Rightarrow$ je rovnoběžná s přímkou $BC \Rightarrow$ je rovnoběžná s rovinou ABC

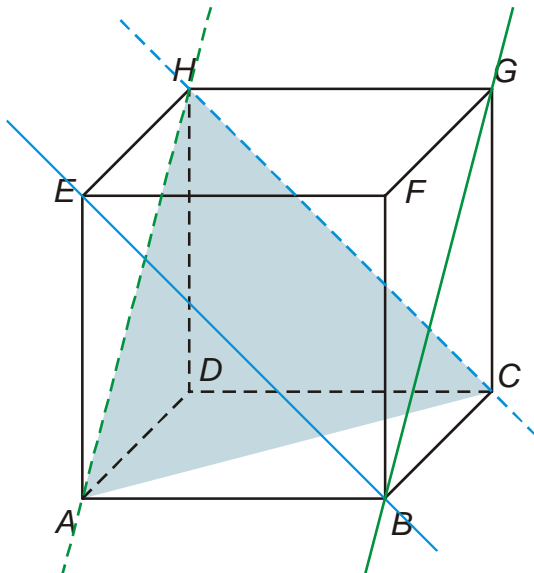
našli jsme dvě různoběžné přímky rovnoběžné s rovinou $ABC \Rightarrow$ rovina $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$ je rovnoběžná s rovinou ABC



Jak najdeme rovinu rovnoběžnou s rovinou ρ procházející bodem A ?

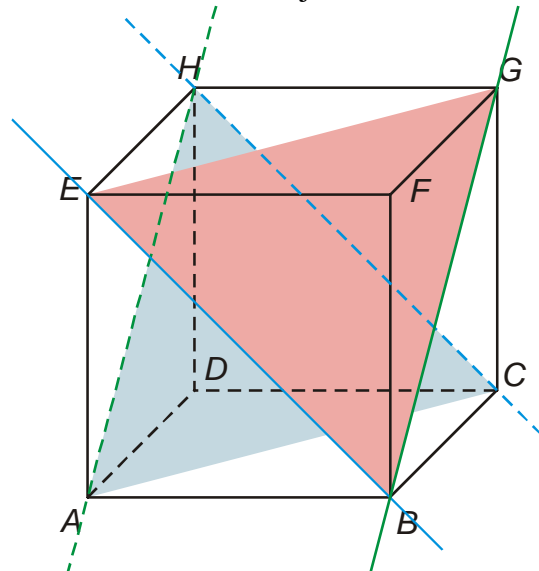
Můžeme použít kritérium rovnoběžnosti: zvolíme v rovině ρ přímky p, q . Jejich rovnoběžky p' a q' procházející bodem A určují rovnoběžnou rovinu ρ' .

Př. 10: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Bodem B veď rovinu rovnoběžnou s rovinou ACH .



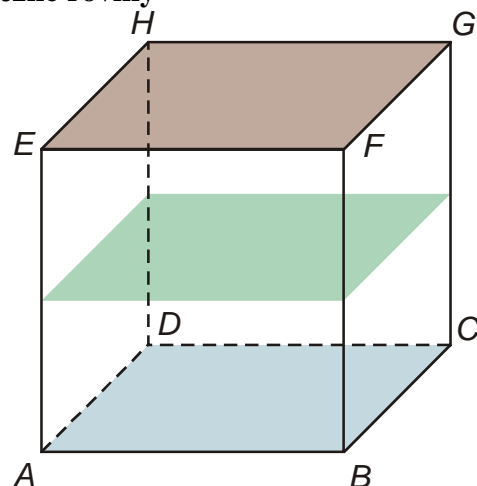
přímka BG je rovnoběžná s přímkou AH
 přímka BE je rovnoběžná s přímkou $CH \Rightarrow$

hledanou rovinou je rovina BEG

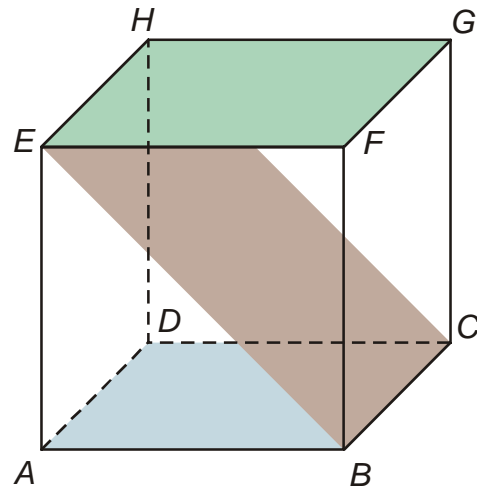
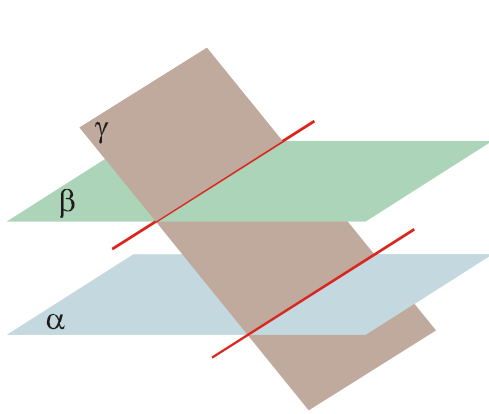


Př. 11: Existuje celkem pět možností pro vzájemnou polohu tří rovin α, β, γ . Najdi všechny tyto možnosti, modeluj je v dvojici pomocí sešitů a demonstruj je pomocí tří rovin určených vrcholy nebo středy hran standardní krychle $ABCDEFGH$.

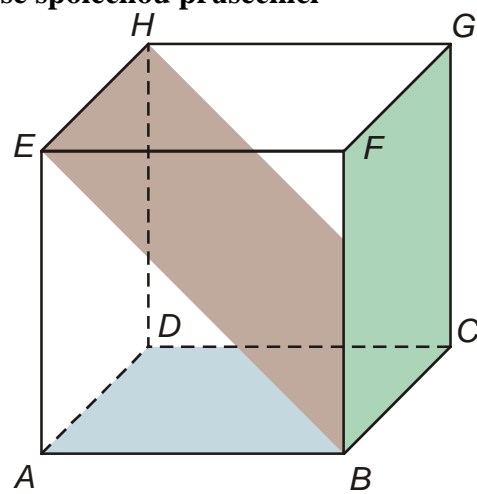
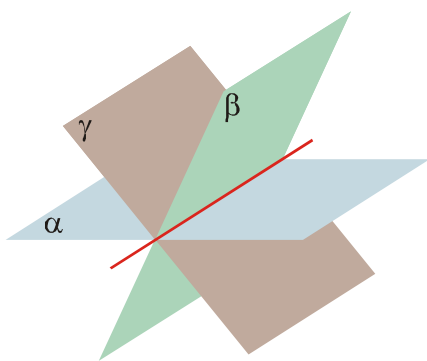
tři navzájem rovnoběžné roviny



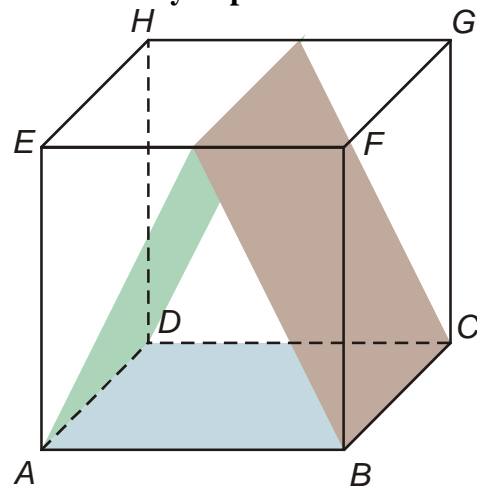
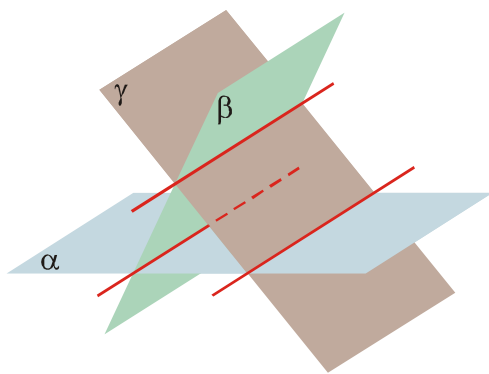
dvě rovnoběžné roviny, třetí je protíná v rovnoběžných přímkách



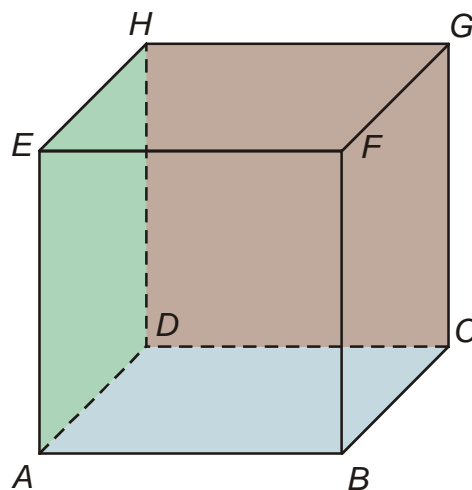
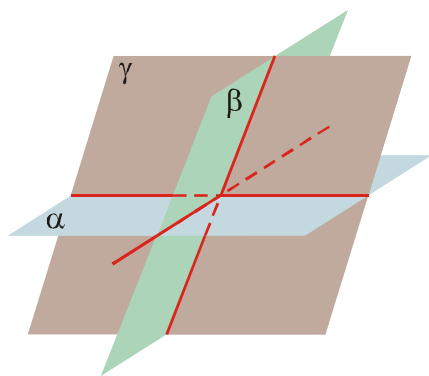
tři navzájem různoběžné roviny se společnou průsečnicí



tři navzájem různoběžné roviny se třemi rovnoběžnými průsečnicemi



tři navzájem různoběžné roviny se třemi průsečnicemi, které procházejí jedním bodem



Př. 12: Petáková:
strana 90/cvičení 3
strana 90/cvičení 4
strana 90/cvičení 5 c) d)

Shrnutí: