

## 5.1.6 Vzájemná poloha dvou přímek

### Předpoklady: 5105

Planimetrie: dvě možnosti pro vzájemnou polohu přímek

- různoběžky – právě jeden společný bod (různý směr)
- rovnoběžky – žádný společný bod (stejný směr)

**Př. 1:** Najdi všechny možné vzájemné polohy přímek v prostoru a modeluj je pomocí tužek.

Možnosti vzájemné polohy dvou přímek v prostoru:

- **různoběžky** – právě jeden společný bod (různý směr, určují rovinu)
- **rovnoběžky** – žádný společný bod (stejný směr, určují rovinu)
- **mimoběžky** – žádný společný bod (různý směr, neurčují rovinu, tato možnost nemůže nastat v rovině)

určit vzájemnou polohu přímek, které si můžeme prohlédnout z více stran není těžké, horší je to pokud máme k dispozici pouze rovnoběžný průmět

**Pedagogická poznámka:** U všech následujících příkladů by se studenti měli snažit určit polohu přímek nejdříve pouze z obrázku, pak nakreslením obrázku při pohledu z jiné strany a teprve jako definitivní potvrzení nebo poslední záchranu by měli používat krychličky.

**Př. 2:** Je dána standardní krychle  $ABCDEFGH$ . Urči vzájemnou polohu přímek:

a)  $AB, CG$

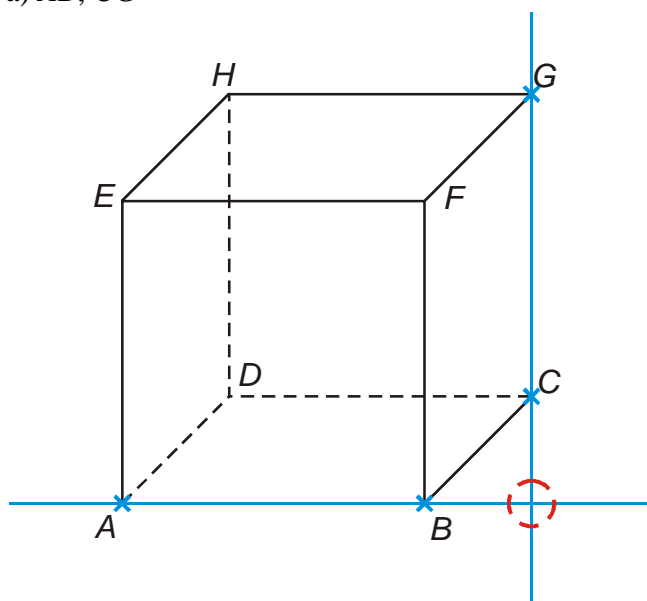
b)  $AS_{CG}, BD$

c)  $AB, S_{BC}S_{CD}$

d)  $BC, S_{AE}S_{DH}$

e)  $EC, BH$

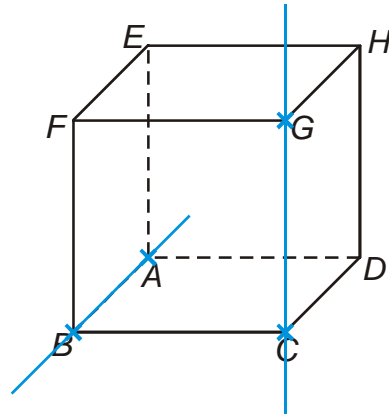
a)  $AB, CG$



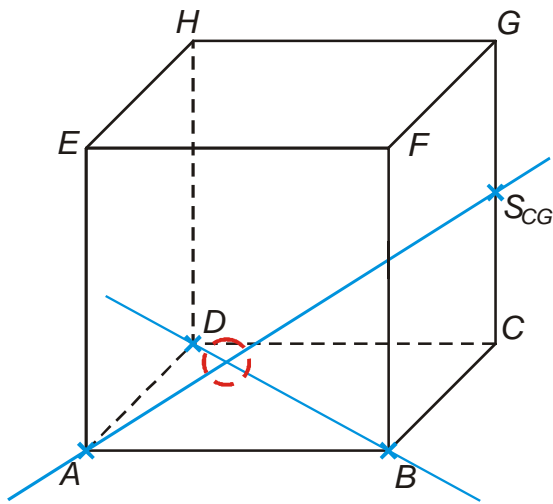
zdá se, že přímky  $AB$  a  $CG$  jsou různoběžné, ale jejich „průsečík“ na průmětně je pouze zdánlivý:

- přímka  $AB$  leží v přední stěně
- přímka  $CG$  leží v zadní stěně

⇒ nikdy se nemohou protnout ⇒ přímky  $AB$  a  $CG$  jsou **mimoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



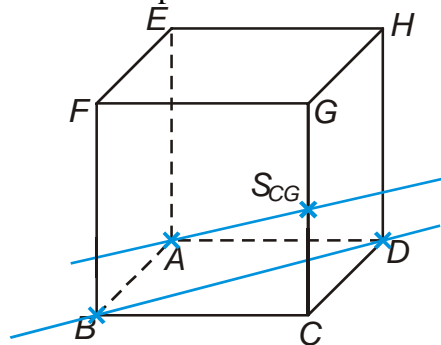
b)  $AS_{CG}, BD$



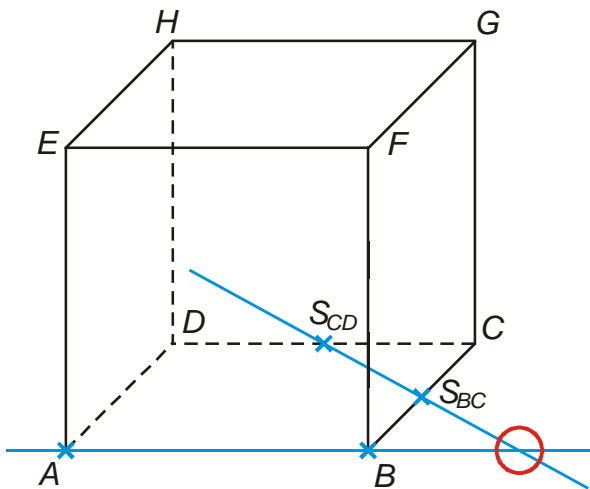
zdá se, že přímky  $BD$  a  $AS_{CG}$  jsou různoběžné, ale jejich „průsečík“ na průmětně je pouze zdánlivý:

- přímka  $BD$  leží v dolní podstavě
- přímka  $AS_{CG}$  se s dolní podstavou protíná pouze v bodě  $A$

$\Rightarrow$  nikdy se nemohou protnout  $\Rightarrow$  přímky  $BD$  a  $AS_{CG}$  jsou **mimoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



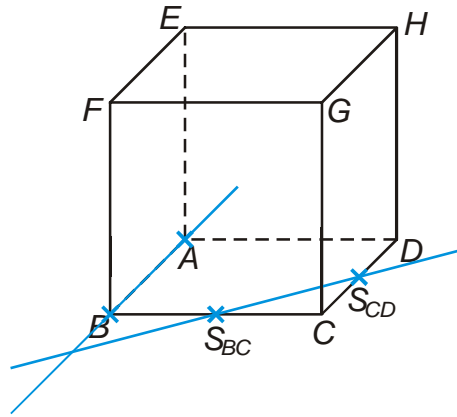
c)  $AB, S_{BC}S_{CD}$



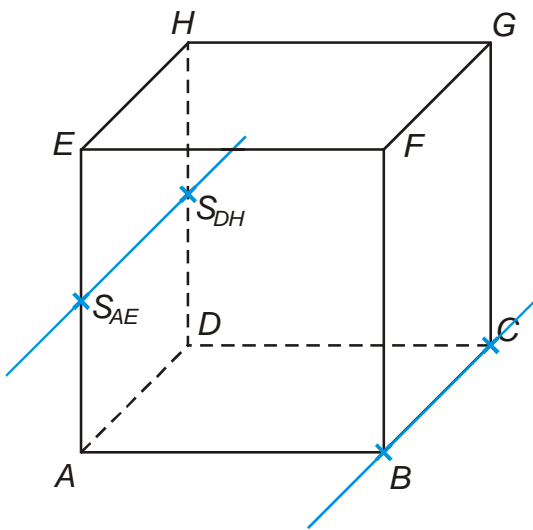
zdá se, že přímky  $BD$  a  $AS_{CG}$  jsou **různoběžné**, jejich průsečík existuje i ve skutečnosti:

- přímka  $AB$  leží v dolní podstavě
- přímka  $S_{BC}S_{CD}$  leží v dolní podstavě

$\Rightarrow$  musí se protnout  $\Rightarrow$  přímky  $AB$  a  $S_{BC}S_{CD}$  jsou **různoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



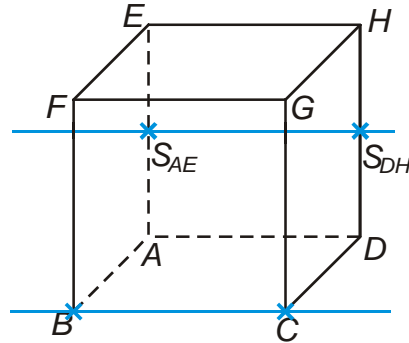
d)  $BC, S_{AE}S_{DH}$



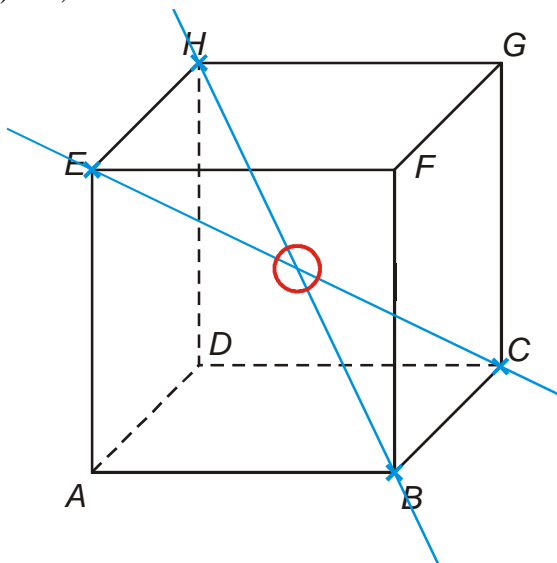
zdá se, že přímky  $BC$  a  $S_{AE}S_{DH}$  jsou **rovnoběžné**:

- přímka  $BC$  je kolmá na přední stěnu
- přímka  $S_{AE}S_{DH}$  je kolmá na přední stěnu

$\Rightarrow$  mají stejný směr  $\Rightarrow$  přímky  $BC$  a  $S_{AE}S_{DH}$  jsou **rovnoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



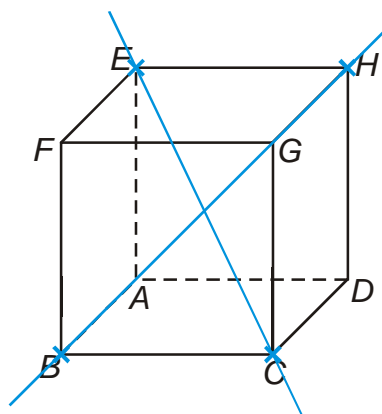
e)  $EC, BH$



zdá se, že přímky  $EC$  a  $BH$  jsou **různoběžné**. Jak se přesvědčíme, že průsečík opravdu existuje?

- přímka  $EH$  je kolmá k přední stěně
- přímka  $BC$  je kolmá k přední stěně

$\Rightarrow$  přímky  $EH$  a  $BC$  jsou rovnoběžné  $\Rightarrow$  body  $B, C, E, H$  leží v jedné rovině  $\Rightarrow$  přímky  $EC$  a  $BH$  leží v jedné rovině  $\Rightarrow$  jsou **rovnoběžné**, což potvrzuje i pohled z boku



**Pedagogická poznámka:** U předchozího příkladu studenti při samotném rozeznávání samozřejmě postupují značně rozdílnými rychlostmi. Ty rychlejší můžete brzdit tím, že po nich budete chtít nejdříve rozhodnout vzájemnou polohu, ale i podrobně zdůvodnit výsledek způsobem používaným v učebnici. U slabších studentů bude stačit, když budou schopni vzájemné polohy rozlišit.

Stejně jako v rovině i v prostoru platí:

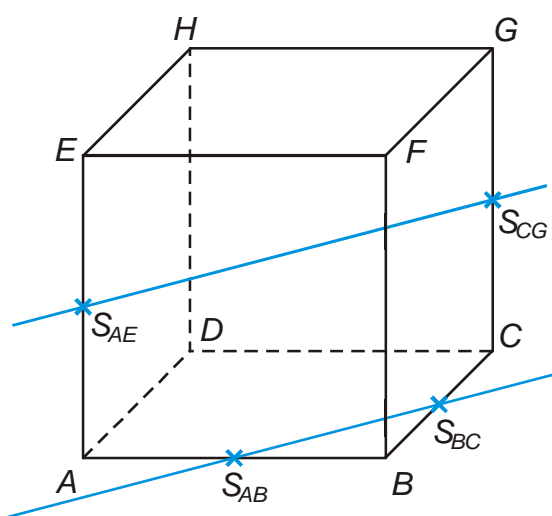
**Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku.**

**Př. 3:** Doplněte větu: „Jsou dány tři přímky  $p, q, r$ . Je-li  $p \parallel q$  a  $q \parallel r$ , pak platí ....“

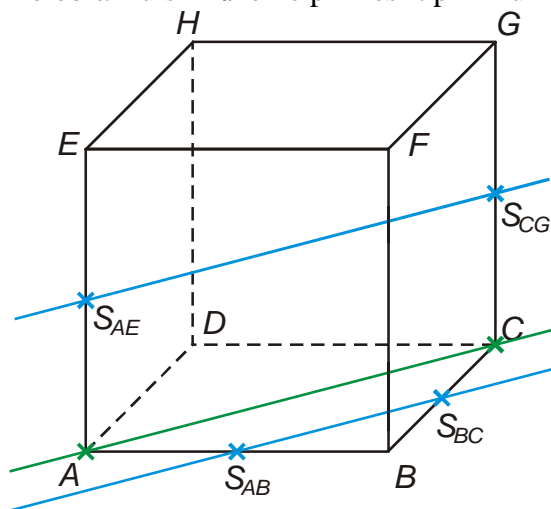
Jsou dány tři přímky  $p, q, r$ . Je-li  $p \parallel q$  a  $q \parallel r$ , pak platí  $p \parallel r$ .

V matematice říkáme, že **rovnoběžnost přímek je tranzitivní (přenáší se)**.

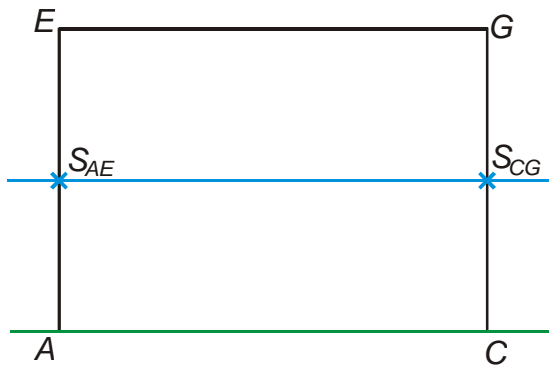
**Př. 4:** S využitím tranzitivnosti dokaž, že ve standardní krychli platí  $S_{AE}S_{CG} \parallel S_{AB}S_{BC}$



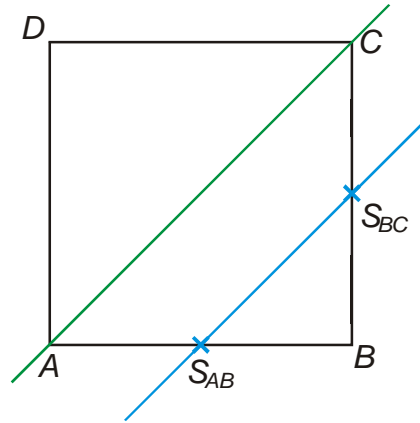
Do obrázku si můžeme přikreslit přímku AC.



Je vidět:



Přímka  $AC$  je rovnoběžná s přímkou  $S_{AE}S_{CG}$  (spojuje středy protilehlých stran a dělí obdélník  $ACGE$  na dvě poloviny).

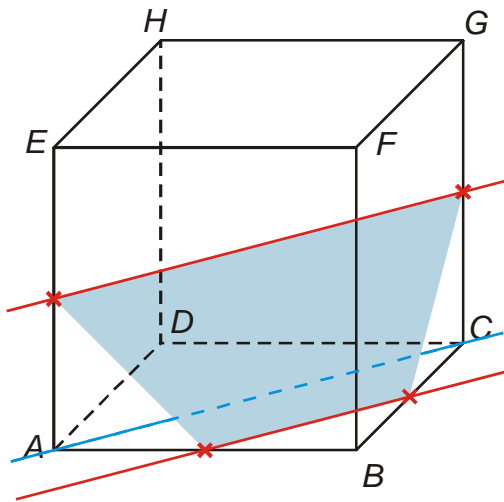


Přímka  $AC$  je rovnoběžná s přímkou  $S_{AB}S_{BC}$  (spojuje středy sousedních stran ve čtverci  $ABCD$  a je tedy rovnoběžná s jeho úhlopříčkou).

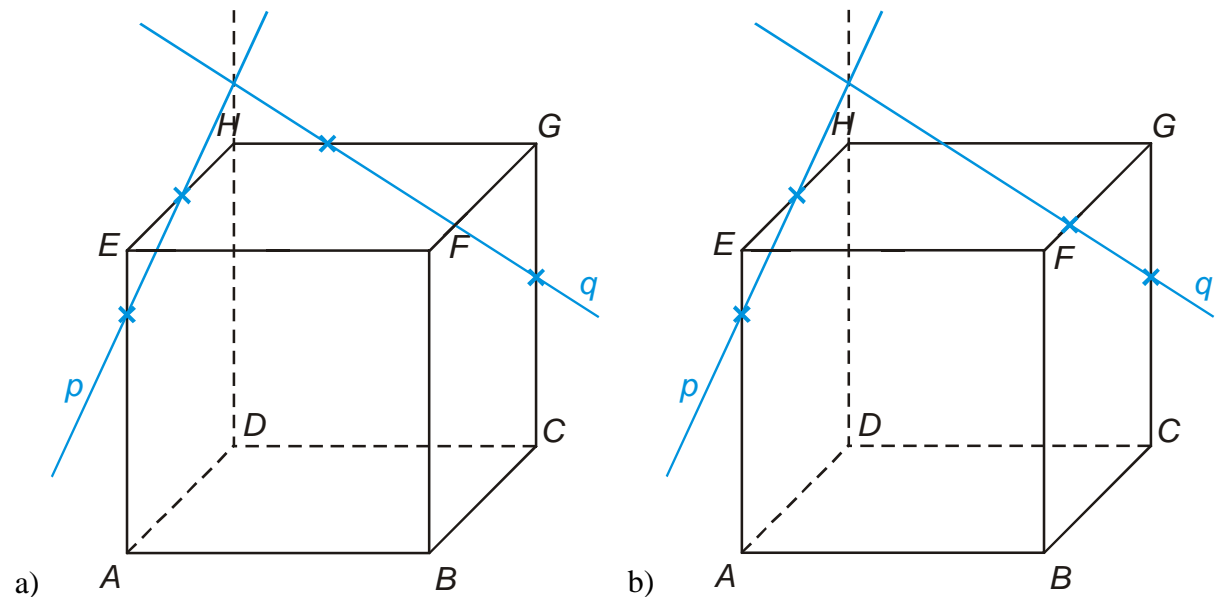
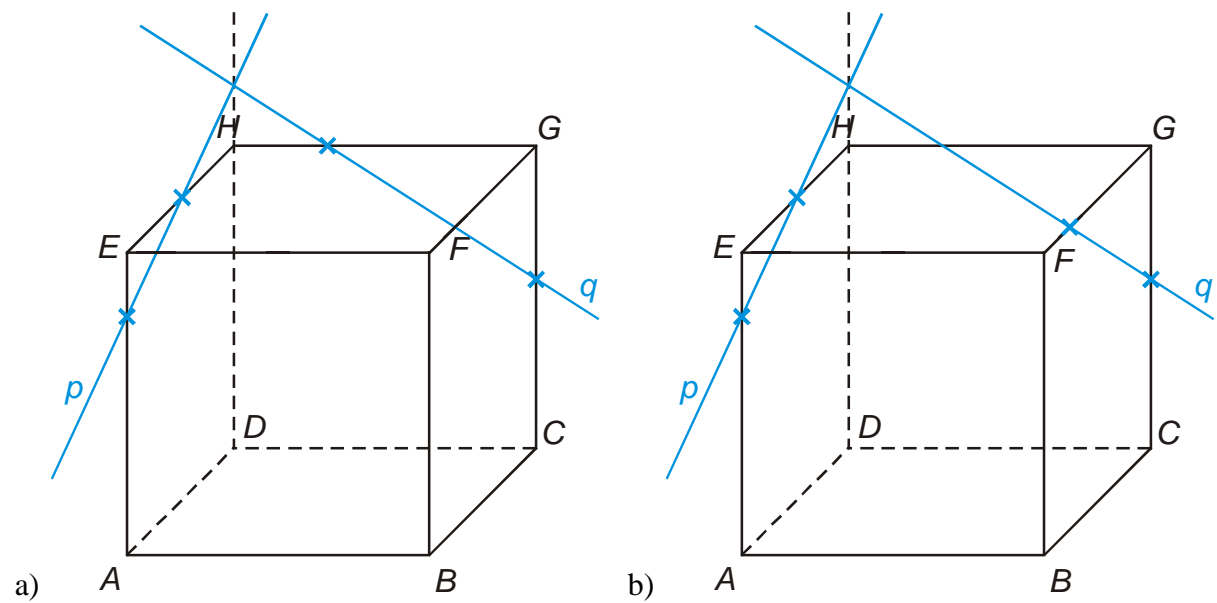
⇒ přímky  $S_{AE}S_{CG}$  a  $S_{AB}S_{BC}$  jsou rovnoběžné.

**Poznámka:** Příklad je ukázkou důležitého přístupu ve stereometrii. Příklad rozdělíme na části, které řešíme v jednotlivých rovinách. Práce v rovinách nám jednak umožňuje používat obrázky nezakreslené promítáním a jednak je daleko snazší pro utváření představ.

**Dodatek:** Předchozí příklad představuje také řešení příkladu 9 z minulé hodiny. Když víme, že přímky  $S_{AE}S_{CG}$  a  $S_{AB}S_{BC}$  jsou rovnoběžné, víme, že tyto přímky určují rovinu a body  $S_{AE}$ ,  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ ,  $S_{CG}$  v této rovině leží.



**Př. 5:** Urči vzájemnou polohu přímek  $p, q$  na obrázcích:



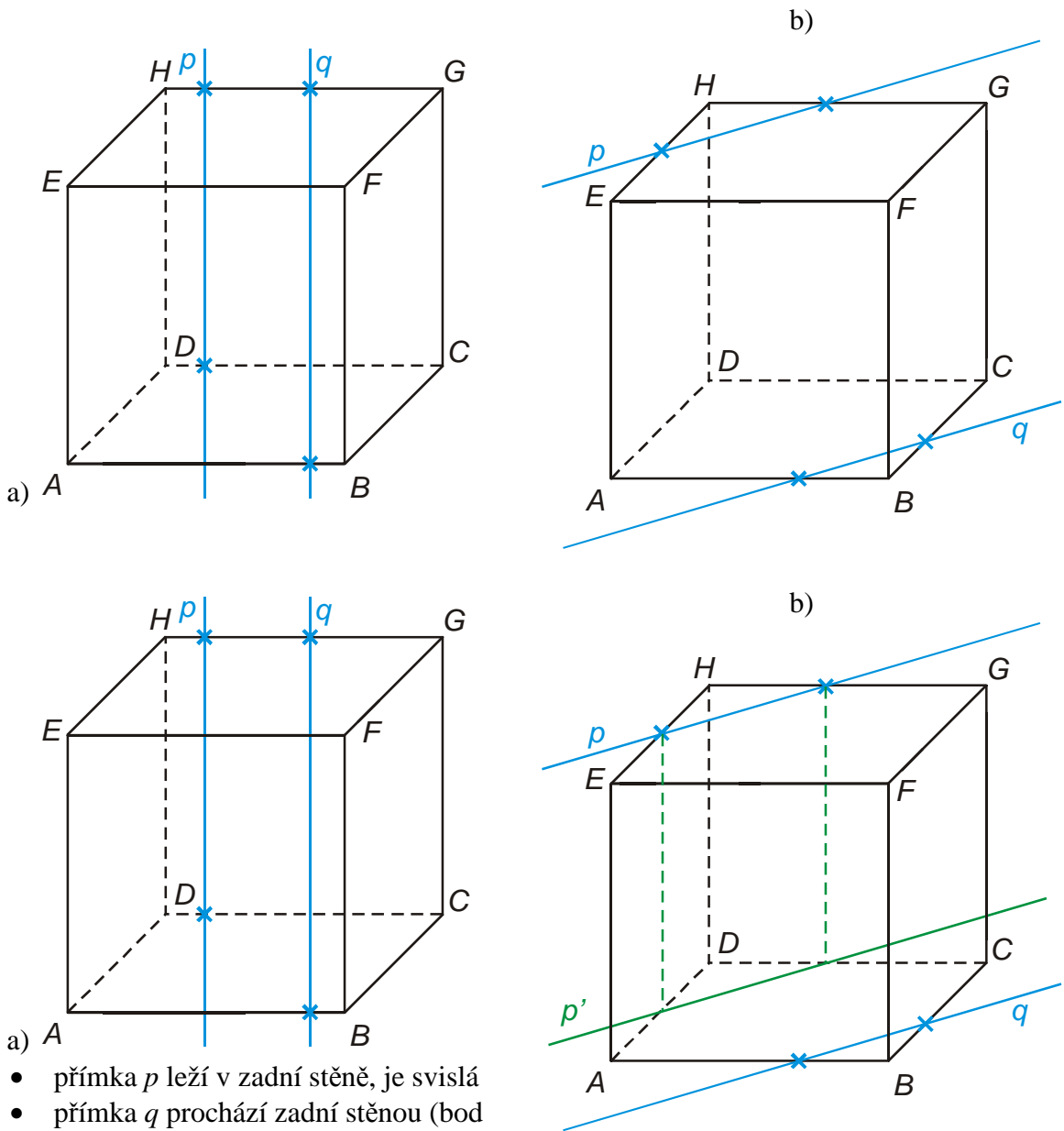
- přímka  $p$  leží v levé boční stěně  $\Rightarrow$  její průsečík s přímkou  $DH$  je skutečný bod
- přímka  $q$  leží v zadní stěně  $\Rightarrow$  její průsečík s přímkou  $DH$  je skutečný bod

$\Rightarrow$  obě přímky se s přímkou  $DH$  protínají ve stejném bodě, který je jejich průsečíkem  $\Rightarrow$  přímky  $p, q$  jsou **různoběžné**

- přímka  $p$  leží v levé boční stěně  $\Rightarrow$  její průsečík s přímkou  $DH$  je skutečný bod
- přímka  $q$  leží v pravé boční stěně  $\Rightarrow$  nemá průsečík s přímkou  $DH$

$\Rightarrow$  obě přímky leží ve dvou různých navzájem rovnoběžných rovinách  $\Rightarrow$  nemohou mít průsečík  $\Rightarrow$  přímky  $p, q$  jsou **mimoběžné**

**Př. 6:** Urči vzájemnou polohu přímek  $p$ ,  $q$  na obrázcích (průměty, které se zdají být rovnoběžné, jsou rovnoběžné):



- přímka  $p$  leží v zadní stěně, je svislá
- přímka  $q$  prochází zadní stěnou (bod na hraně  $HG$ ) i přední stěnou (bod na hraně  $AB$ ) v zadní stěně  $\Rightarrow$  není svislá

$\Rightarrow$  přímky  $p$ ,  $q$  mají různý směr, neprotínají se  $\Rightarrow$  přímky  $p$ ,  $q$  jsou **mimoběžné**

k přímce  $p$  můžeme najít v rovině podstavy přímku  $p'$ , která je s ní rovnoběžná a je rovnoběžná s přímkou  $q$   $\Rightarrow$  přímky  $p$ ,  $q$  jsou **rovnoběžné**

**Př. 7:** Petáková:  
 strana 90/cvičení 1 a) b) c) d)  
 strana 90/cvičení 5 a)

**Shrnutí:** Ve stereometrii není všechno tak, jak se na první pohled z obrázku zdá.