5.1.5 Základní vztahy mezi body přímkami a rovinami

Předpoklady: 5102

Prostor má tři rozměry, skládá se z bodů.
$\Rightarrow$

- Přímka - jednorozměrná podmnožina prostoru (množina bodů)
- Rovina - dvojrozměrná podmnožina prostoru (množina bodů)

Zápisy vztahů, které mohou nastat mezi bodem *A*, přímkou *p* a rovinou ρ:

- bod leží (neleží) na přímce: $A \in p$ ($A \notin p$)
- bod leží (neleží) v rovině: $A \in \rho$ ($A \notin \rho$)
- přímka leží (neleží) v rovině: $p \subset \rho$ ($p \not\subset \rho$)

Př. 1: Proč se pro vztah „přímka leží v rovině“ nepoužívá zápis $p \in \rho$?

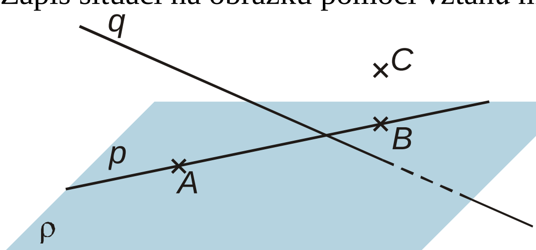
Zápis $p \in \rho$ znamená, že přímka *p* je prvkem roviny ρ. To však není pravda, protože rovina ρ se neskládá z přímek, ale z bodů.

Stejné situace, ale pohled na vztahy z druhé strany:

- přímka prochází (neprochází) bodem: $A \in p$ ($A \notin p$)
- rovina prochází bodem (neprochází): $A \in \rho$ ($A \notin \rho$)
- rovina prochází přímkou (neprochází): $p \subset \rho$ ($p \not\subset \rho$)

V obou případech používáme stejný zápis, ale různá vyjádření (podle toho zda je první bod nebo přímka) $\Rightarrow$ existuje i „symetrické“ vyjádření tohoto vztahu:
Bod leží na přímce (přímka prochází bodem) $\Leftrightarrow$ **bod je incidentní s přímkou** (přímka je incidentní s bodem)

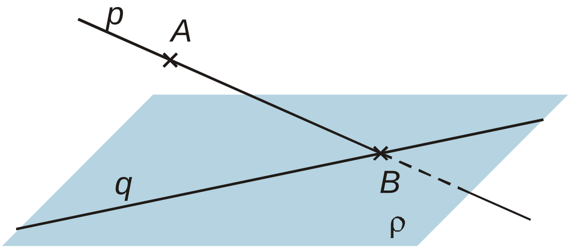
Př. 2: Zapiš situaci na obrázku pomocí vztahů mezi body, přímkami a rovinou.



$A \in p$, $A \in \rho$, $A \notin q$
$B \in p$, $B \in \rho$, $B \notin q$
$C \notin p$, $C \notin \rho$, $C \notin q$
$p \subset \rho$, $q \not\subset \rho$

Př. 3: Nakresli obrázek, který odpovídá situaci: $A \in p$, $p \not\subset \rho$, $B \in p$, $B \in q$, $q \subset \rho$.

bod *B* leží na obou přímkách (leží tedy v jejich průsečíku) a zároveň v rovině ρ $\Rightarrow$ přímky *p*, *q* se protínají v rovině ρ a tento průsečík se jmenuje *B*



Víme už z planimetrie:
Každými dvěma různými body je určena právě jedna přímka $\Rightarrow$ proto můžeme psát přímka *p* nebo přímka *AB* ($\leftrightarrow AB$).

Př. 4: Doplň souvětí:
a) Jestliže bod *A* leží na přímce *p* a přímka *p* leží v rovině ρ, pak …
b) Jestliže v rovině ρ leží dva body *A*, *B*, které určují přímku *p*, pak …

a) Jestliže bod *A* leží na přímce *p* a přímka *p* leží v rovině ρ, pak bod *A* leží v rovině ρ.
b) Jestliže v rovině ρ leží dva body *A*, *B*, které určují přímku *p*, pak přímka *p* leží v rovině ρ.

Př. 5: Najdi všechny způsoby, jak může být pomocí bodů a přímek určena rovina.

Každá rovina je jednoznačně určena:
- **třemi body, které neleží v téže přímce** $\Rightarrow$ u bodů *A*, *B*, *C* pak mluvíme o rovině *ABC* ($\leftrightarrow ABC$)
- **přímkou a bodem, který na ní neleží** $\Rightarrow$ u bodu *A* a přímky *p* pak mluvíme o rovině *Ap* ($\leftrightarrow Ap$)
- **dvěma různoběžnými přímkami** $\Rightarrow$ u přímek *p* a *q* pak mluvíme o rovině *pq* ($\leftrightarrow pq$)
- **dvěma různými rovnoběžnými přímkami** $\Rightarrow$ u přímek *p* a *q* pak mluvíme o rovině *pq* ($\leftrightarrow pq$)

Pedagogická poznámka: Samozřejmě je třeba všechny možnosti ihned demonstrovat.

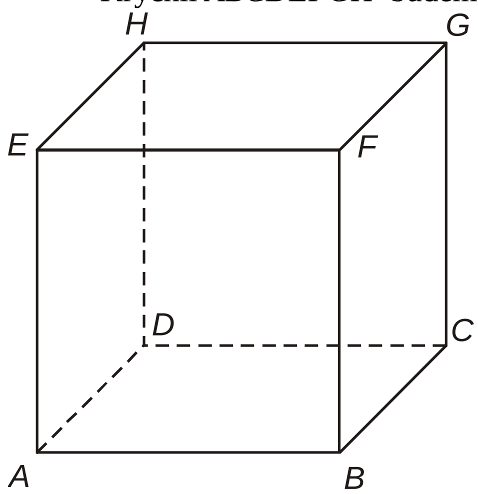
Př. 6: Vysvětli, proč se čtyřnohý stůl může na rozdíl od trojnohého kývat.

Teoretický matematický pohled říká, že je to kvůli tomu, že tři body (místa, kde se nohy dotýkají země) určují rovinu (a tedy vždy v ní leží), zatímco čtyři body v rovině ležet nemusí.
Při hlubším zamyšlení tato argumentace neobstojí, protože i čtyřnohý stůl s jednou kratší nohou se dotýká země ve třech bodech, je tedy fakticky trojnohý a většinou se kývá.
Důvod je v konstrukci. Nohy se ke stolu montují tak, aby těžiště stolu (místo, kde musíme stůl podepřít, aby se nepřevrátil) bylo mezi nohami. Pokud jsou nohy jen tři, je to v pořádku.
Pokud jsou nohy čtyři, nachází se těžiště většinou nad průsečíkem úhlopříček čtyřúhelníku,

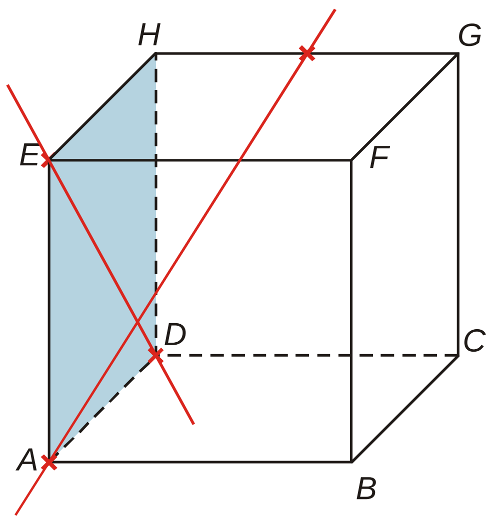
který tvoří místa dotyku noh se zemí. Pokud je takový stůl opřen pouze o tři nohy, je těžiště fakticky zcela na kraji podepřené plochy a stůl se tak snadno překlopí (na čtvrtou nohu).

Domluva:

- S_{AB} - znamená střed úsečky AB
- Krychli $ABCDEFGH$ budeme říkat standardní krychle.



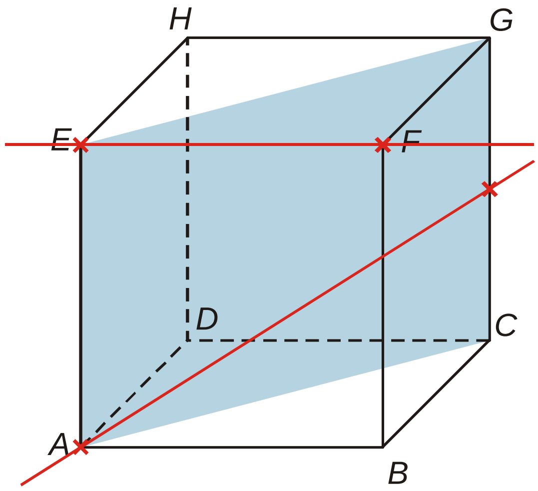
Př. 7: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku přímky ED, AS_{GH} a rozhodni, zda leží v rovině ADE.



Z obrázku je zřejmé, že:

- $\leftrightarrow ED \subset \leftrightarrow ADE$, protože v rovině leží body E, D
- $\leftrightarrow AS_{GH} \not\subset \leftrightarrow ADE$, protože v rovině neleží bod S_{GH}

Př. 8: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku přímky EF, AS_{CG} a rozhodni, zda leží v rovině ACG.



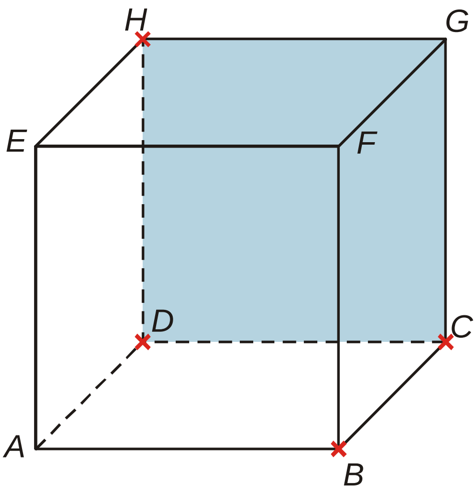
Z obrázku je zřejmé, že:

- $\leftrightarrow EF \not\subset \leftrightarrow ACG$, protože v rovině neleží bod F
- $\leftrightarrow AS_{CG} \subset \leftrightarrow ACG$, protože v rovině neleží bod S_{GH}

Pedagogická poznámka: Studenti v tomto okamžiku ještě neumí kreslit řezy, takže mohou mít problémy s nakreslením roviny *ACG*. Většina z nich to však zvládne intuitivně. Studenti, kteří si nevšimnou, že přímka *EF* v rovině *ACG* neleží budou mít v následujících hodinách problémy a je potřeba dávat zvláštní pozor, zda si uvědomují (a hlavně se podle toho chovají), že ne vše, co vidí na obrázku, je stejné ve skutečnosti.

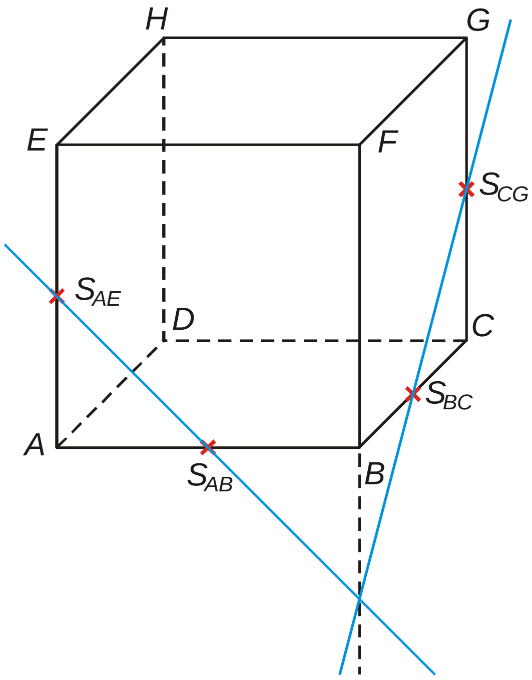
Př. 9: Je dána standardní krychle. Rozhodni zda leží v jedno rovině body:
a) *B*, *D*, *G*, *H*
b) S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG}

a)

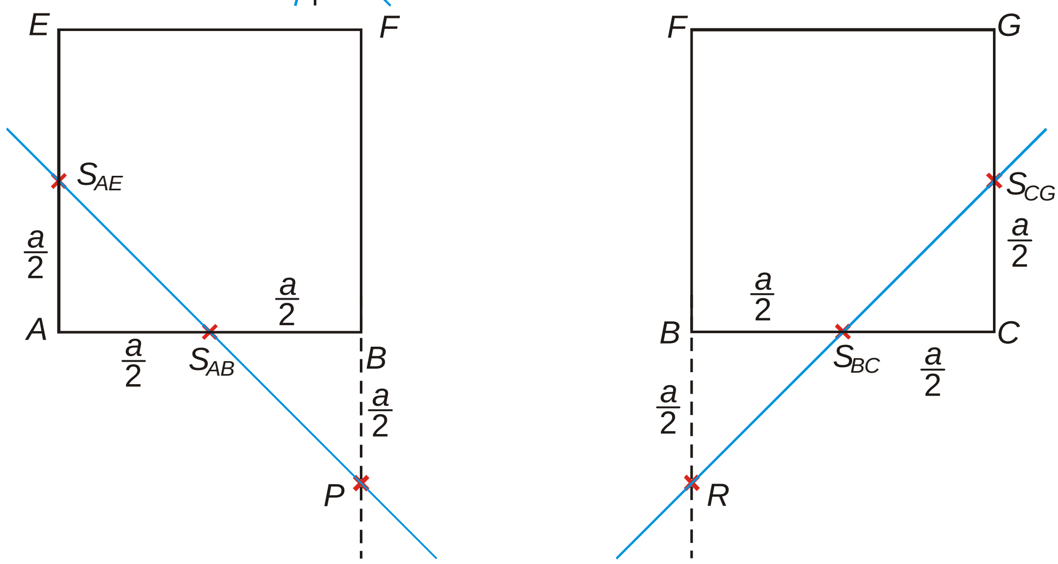


Z obrázku je zřejmé, že body *B*, *D*, *G*, *H* neleží v rovině, protože body *D*, *G*, *H* leží v zadní stěně, zatímco bodu *B* v přední stěně.

b)



Z obrázku není poloha bodů zcela zřejmá $\Rightarrow$ zkusíme použít jedno z pravidel, která je možné převést na čtyři body – rovina je určena dvojicí různoběžek.
Jsou přímky $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$ různoběžné?
Musel by existovat společný průsečík.
Z obrázku je vidět, že by průsečík mohl existovat na přímce *FB* $\Rightarrow$ nakreslíme si obrázky v rovinách *ABE* a *BCF* a spočteme v jakém bodě se protíná s přímkou *BF*.



Trojúhelníky $S_{AE}AS_{AB}$ a $S_{AB}BP$ jsou shodné $\Rightarrow$ $|BP| = \frac{a}{2}$

Trojúhelníky $S_{CG}CS_{BC}$ a $S_{BC}BR$ jsou shodné $\Rightarrow$ $|BR| = \frac{a}{2}$

Body *P* i *R* jsou od bodu *B* stejně daleko $\Rightarrow$ jde o jeden bod $\Rightarrow$ přímky $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$ mají průsečík $\Rightarrow$ jsou různoběžné $\Rightarrow$ body S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG} leží v jedné rovině

V planimetrii rozděluje přímka rovinu na dvě poloroviny. $\Rightarrow$ Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem opačné poloprostory a je jejich společnou hraniční rovinou.

Stejně jako v planimetrii platí:
Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže úsečka spojující kterékoli dva body útvaru je části tohoto útvaru.

Shrnutí: