4.4.3 Další trigonometrické věty

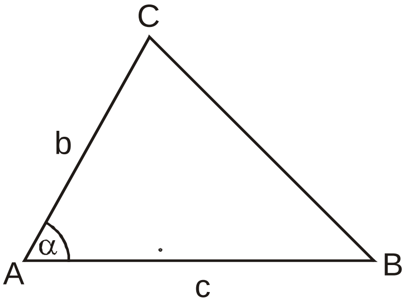
Předpoklady: 4402

Věty, které objevíme v této hodině, mohou usnadnit některé výpočty, ale je možné se bez nich (na rozdíl od kosinové a sinové věty) obejít.

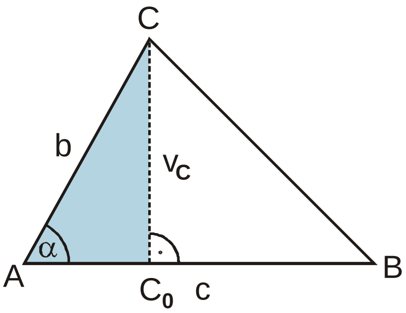
Pedagogická poznámka: Následující dva příklady třída počítá najednou rozdělená do dvou skupin.

Př. 1: Urči obsah trojúhelníku *ABC*, jestliže platí:
a) $c=14$; $b=10,3$; $\alpha=60°57'$, b) $c=14$; $b=10,3$; $\alpha=119°3'$.
Nejdříve odvoď obecný vzorec a pak dosaď.

a)



Obsah trojúhelníka $S=\frac{c\cdot v_C}{2}$ $\Rightarrow$ určíme výšku v_C.



Z pravoúhlého trojúhelníka ACC_0:

$\sin\alpha=\frac{v_C}{b}\Rightarrow v_C=b\cdot\sin\alpha$.

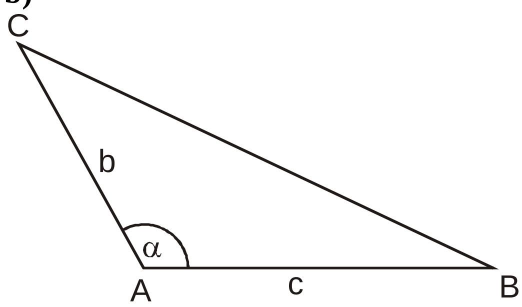
Dosadíme:

$$S=\frac{c\cdot v_C}{2}=\frac{c\cdot b\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

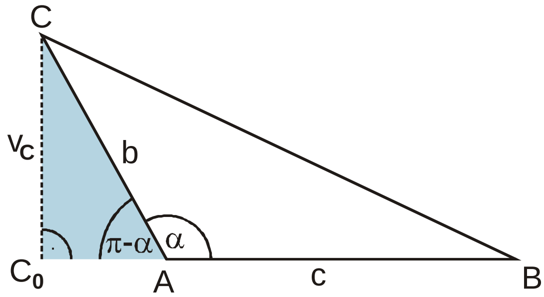
Určíme obsah:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 10,3\cdot 14\cdot\sin 60°57'=63$$

b)



Obsah trojúhelníka $S=\frac{c\cdot v_C}{2}$ $\Rightarrow$ určíme výšku v_C.



Z pravoúhlého trojúhelníka ACC_0:

$\sin(\pi-\alpha)=\frac{v_C}{b}\Rightarrow v_C=b\cdot\sin(\pi-\alpha)$.

Dosadíme:

$$S=\frac{c\cdot v_C}{2}=\frac{c\cdot b\cdot\sin(\pi-\alpha)}{2}=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\alpha)$$

Určíme obsah:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10,3\cdot 14\cdot\sin(180°-119°3')=63$$

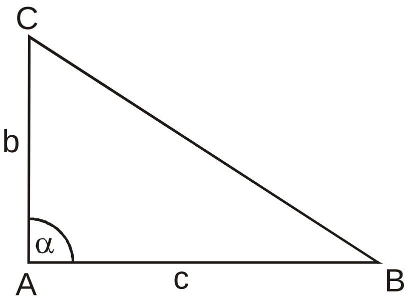
Máme podobné vzorce a stejné výsledky $\Rightarrow$ asi to není náhoda.
$60°57' + 119°3' = 180° \Rightarrow \sin 60°57' = \sin(180° - 119°3')$

Navíc: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\sin\alpha = \sin\alpha \Rightarrow$

$S = \frac{1}{2}bc\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \Rightarrow$ v obou případech jsme odvodili stejný vzorec

Vzorec platí pro všechny ostroúhlé i tupoúhlé trojúhelníky.

Př. 2: Rozhodni, zda vzorec z předchozího příkladu platí i pro trojúhelník s pravým úhlem α.



V pravoúhlém trojúhelníku platí $v_C = b \Rightarrow S = \frac{bc}{2}$.

Dosadíme: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin 90° = \frac{1}{2}bc\cdot 1 = \frac{bc}{2}$.

Vztah platí i pro pravoúhlý trojúhelník.

Tedy pro každý trojúhelník platí vzorec $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Př. 3: Přepiš vzorec pro výpočet obsahu i po další kombinace stran a úhlů.

Vzorec $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ umožňuje určit obsah trojúhelníku pomocí dvou stran a úhlu mezi nimi

$\Rightarrow$ další možnosti dvou stan a úhlu mezi nimi jsou $S = \frac{1}{2}ca\sin\beta$ a $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Pro každý trojúhelník *ABC*, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky *a*, *b*, *c* platí : $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta$**.**

Př. 4: V trojúhelníku *ABC* je dáno: $b = 6{,}7$; $\beta = 38°$; $\gamma = 73°$. Urči jeho obsah.

Pokud chceme použít předchozí vzorec pro obsah trojúhelníka, musíme určit dvě strany a úhel mezi nimi.

Snadno můžeme dopočíst stranu *c* (sinová věta):

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot b = \frac{\sin 73°}{\sin 38°}\cdot 6{,}7 = 10{,}4$

Potřebujeme úhel mezi stranami *b* a *c*, tedy úhel α.

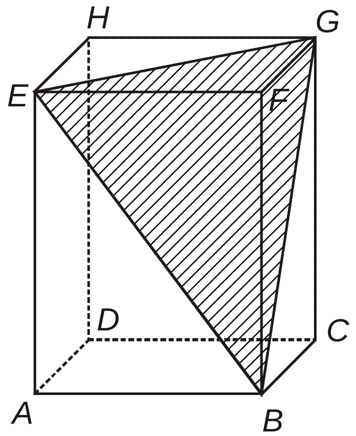
$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (38° + 73°) = 69°$

Dosazení: $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 10,4 \cdot \sin 69° = 32,5$

Obsah trojúhelníka *ABC* je 32,5.

Př. 5: Je dán kvádr *ABCDEFGH* o délkách stran 2,3,4. Urči obsah trojúhelníku *EBG*.

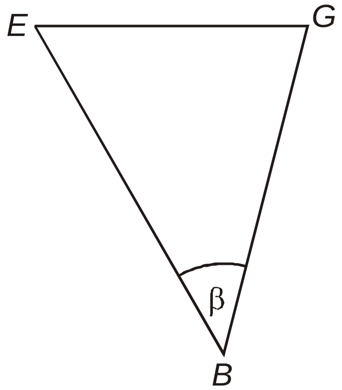
Nakreslíme si kvádr, na označení v tomto případě nezáleží (strany trojúhelníka jsou stěnové úhlopříčky všech druhů obdélníků, které se na kvádru vyskytují). Zvolíme například toto: $|AB| = 3$; $|BC| = 2$; $|AE| = 4$.



Pomocí Pythagorovy věty určíme délky jednotlivých stran trojúhelníku *EBG*.

- **Strana *EB*** (přepona v pravoúhlém trojúhelníku *ABE*):
  $|EB| = \sqrt{|AB|^2 + |AE|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- **Strana *BG*** (přepona v pravoúhlém trojúhelníku *BCG*):
  $|BG| = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.
- **Strana *EG*** (přepona v pravoúhlém trojúhelníku *EGH*):
  $|EG| = \sqrt{|GH|^2 + |EH|^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Teď známe všechny strany v řešeném trojúhelníku:



Pokud chceme použít vzorec musíme vypočíst jeden z úhlů (například β) pomocí kosinové věty: $\cos \beta = \frac{|BE|^2 + |BG|^2 - |EG|^2}{2 \cdot |BE| \cdot |BG|} = \frac{5^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 - \sqrt{13}^2}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5}} = 0,7155 \Rightarrow \beta = 44°19'$

Dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu:

$S = \frac{1}{2}|BE| \cdot |BG| \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5} \sin 44°19' = 7{,}8$

Obsah trojúhelníka *BEG* je 7,8.

Př. 6: Najdi v tabulkách vzorec, který by umožnil spočítat obsah trojúhelníku *BEG* (z předchozího příkladu) přímo z délek jeho stran bez určování velikosti vnitřního úhlu. Pomocí nalezeného vzorce obsah vypočti a porovnej výsledky.

Vzorec (Heronův) je v části se vzorci v kapitole o planimetrii a goniometrii na straně 35 v tomto znění: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Určíme *s*: $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+2\sqrt{5}+\sqrt{13}}{2} \doteq 6{,}54$

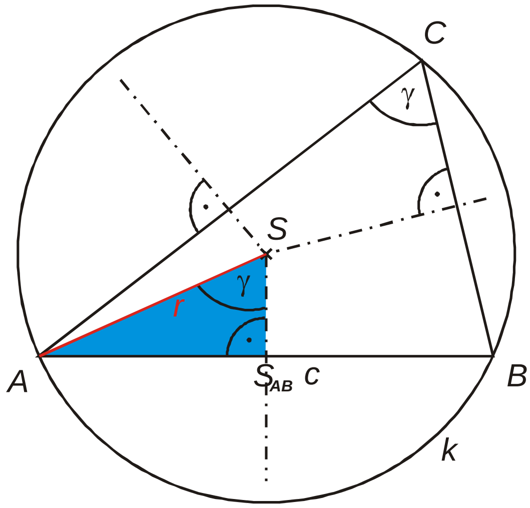
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{6{,}54(6{,}54-5)\left(6{,}54-2\sqrt{5}\right)\left(6{,}54-\sqrt{13}\right)} = 7{,}8$

Oba postupy vedou ke stejnému výsledku.

Kromě vzorců pro obsah trojúhelníka existují i vzorce po výčet poloměru kružnice opsané a kružnice vepsané.

Př. 7: V trojúhelníku *ABC* známe: $|AB| = 12$ a $\gamma = 66°$. Urči poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

Nakreslíme obrázek situace. Střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran.



Poloměr kružnic opsané spočteme z trojúhelníku ASS_{AB}. Je pravoúhlý a platí: $|AS| = r$; $|AS_{AB}| = \frac{c}{2}$; $\sphericalangle ASS_{AB} = \gamma$ (je polovinou $\sphericalangle ASB$, který je kvůli větě o obvodovém a středovém úhlu dvojnásobkem úhlu γ).

Platí $\sin\gamma = \frac{|AS_{AB}|}{|AS|} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} \Rightarrow r = \frac{c}{2\sin\gamma}$.

Dosadíme: $r = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{12}{2 \cdot \sin 66°} = 6{,}6$

Dodatek: Je dobré si uvědomit, že trojúhelník *ABC* není v předchozím příkladě zcela zadaný. Známe jen dvě velikosti, vrchol *C* by mohl ležet kdekoliv na delším oblouku *AB* kružnice *k*. Trojúhelník by pak sice vypadal jinak, ale poloměr kružnice opsané by se nezměnil.

Př. 8: Napiš další možné varianty vzorce odvozeného v předchozím příkladě.

Poloměr kružnice opsané jsme počítali z úhlu a protější strany, platí tedy

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

Př. 9: Najdi v tabulkách další vzorce pro výpočet poloměrů kružnice opsané a vepsané.

Vzorce jsou v části se vzorci v kapitole o planimetrii a goniometrii na straně 35 v tomto znění:

poloměr kružnice opsané : $r = \frac{abc}{4S}$,

poloměr kružnice vepsané: $\rho = \frac{S}{s}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Dodatek: Předchozí vzorce se někdy uvádějí ve tvarech: $S = \frac{abc}{4r}$, $S = \rho s$ jako vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku.

Př. 10: Urči obvod trojúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru 7 cm, jestliže jeho vnitřní úhly mají velikosti: $\alpha = 67°$; $\beta = 81°$.

Na první pohled neřešitelné. Hledáme nějaký vztah mezi poloměrem kružnice opsané a velikostí strany $\Rightarrow$ $r = \frac{a}{2\sin\alpha} \Rightarrow a = r \cdot 2\sin\alpha$.

Podobně můžeme vyjádřit i ostatní strany: $b = r \cdot 2\sin\beta$; $c = r \cdot 2\sin\gamma$.

$o = a + b + c = r \cdot 2\sin\alpha + r \cdot 2\sin\beta + r \cdot 2\sin\gamma = 2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

Určíme úhel γ: $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (67° + 81°) = 32°$.

Dosadíme: $o = 2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2 \cdot 7(\sin 67° + \sin 81° + \sin 32°) = 34{,}1$

Trojúhelník má obvod 34,1 cm.

Př. 11: Petáková:
strana 50/cvičení 96
strana 51/cvičení 100
strana 51/cvičení 105

Shrnutí: