

## 4.4.2 Kosinová věta

**Předpoklady:** 4401

**Př. 1:** Rozhodni, zda dokážeme spočítat zbývající strany a úhly u všech trojúhelníků zadaných pomocí trojice prvků (délek stran a velikostí úhlů).

V sinové větě vystupují dvě dvojice strana-protější úhel. Jednu z nich musíme znát druhou dopočítáváme. V případě, že známe dva úhly, můžeme dopočítat i třetí do sinové věty. Bez jedné dvojice strana-protější úhel počítat pomocí sinové věty nemůžeme  $\Rightarrow$  všechny prvky trojúhelníku zatím nedokážeme dopočítat, když známe:

- všechny tři strany a žádný úhel,
- dvě strany a úhel proti třetí straně.

Pro řešení úloh neřešitelných pomocí sinové věty existuje **věta kosinová**.

**Př. 2:** Najdi v tabulkách znění kosinové věty a s její pomocí vyřeš následující příklad. V trojúhelníku  $ABC$  urči zbývající strany a úhly, je-li dáno:  $a = 4,3$ ;  $b = 3,1$ ;  $\gamma = 57^\circ 31'$ .

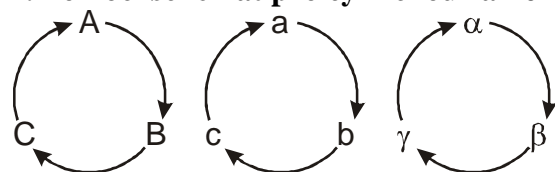
Kosinová věta je uvedena v tabulkách v části se vzorci v kapitole o planimetrii a goniometrii na straně 35 v tomto znění:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

Ve vzorci z tabulek se vyskytuje úhel  $\alpha$ , který neznáme, a určuje se strana  $a$ , kterou známe  $\Rightarrow$  musíme vzorec přepsat pro naše zadání. Dvě možnosti:

### 1. Pomocí významu stran a úhlů

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  - stranu  $a$  určíme pomocí zbývajících stran a protějšího úhlu (obě zbývající strany můžeme ve vzorci libovolně zaměňovat)  $\Rightarrow$  stranu  $c$  určíme také pomocí zbývajících stran ( $a$  a  $b$ ) a protějšího úhlu  $\gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  - do tohoto vzorce již můžeme dosadit.

### 2. Pomocí schémat pro cyklickou záměnu



Od strany  $a$  se ke straně  $c$  dostaneme dvojitým posunutím ve směru šipek.

Ze vzorce  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  získáme  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

Určíme stranu  $c$ :  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

$$c = \sqrt{4,3^2 + 3,1^2 - 2 \cdot 4,3 \cdot 3,1 \cos 57^\circ 31'}$$

$$c = 3,71$$

Další úhly bychom mohli určit pomocí kosinové věty, ale jednodušší bude použití věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Určíme úhel  $\alpha$ :

Určíme úhel  $\beta$ :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma$$

$$\sin \alpha = \frac{4,3}{3,71} \sin 57^\circ 31'$$

$$\alpha = 77^\circ 53'$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 180^\circ - (77^\circ 53' + 57^\circ 31')$$

$$\beta = 44^\circ 36'$$

V trojúhelníku  $ABC$  platí:  $a = 4,3$ ,  $b = 3,1$ ,  $c = 3,71$ ,  $\alpha = 77^\circ 53'$ ,  $\beta = 44^\circ 36'$ ,  $\gamma = 57^\circ 31'$ .

**Př. 3:** Zapiš kosinovou větu ve všech třech variantách (pro strany  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ).

Kosinová věta umožňuje určit stranu čtverce pomocí zbývajících stran a protějšího úhlu  $\Rightarrow$

- pro stranu  $a$  (zbývajících stran  $b$ ,  $c$ , protější úhel  $\alpha$ ):  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ ,
- pro stranu  $b$  (zbývajících stran  $c$ ,  $a$ , protější úhel  $\beta$ ):  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ ,
- pro stranu  $c$  (zbývajících stran  $a$ ,  $b$ , protější úhel  $\gamma$ ):  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

**Poznámka:** Stejný výsledek získáme i pomocí schémat pro cyklickou záměnu.

**Pro každý trojúhelník  $ABC$  platí:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

**Př. 4:** Z vět pro pravoúhlý trojúhelník najdi takovou, která má vztah ke kosinové větě. Urči tento vztah.

Kosinová věta připomíná větu Pythagorovu:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \times \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Rozdíl je v posledním členu, který u Pythagorovy věty chybí.

Zjistíme si hodnotu tohoto členu pro pravoúhlý trojúhelník.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \text{strana } c \text{ je přepona} \Rightarrow \gamma = 90^\circ.$$

Dosadíme do kosinové věty:

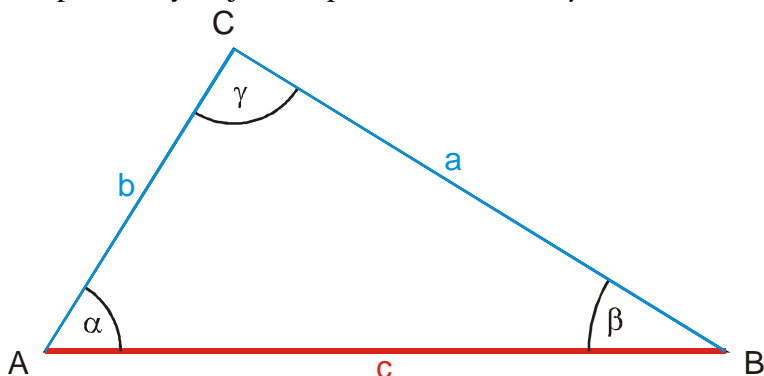
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$$

Kosinová věta přešla do věty Pythagorovy  $\Rightarrow$

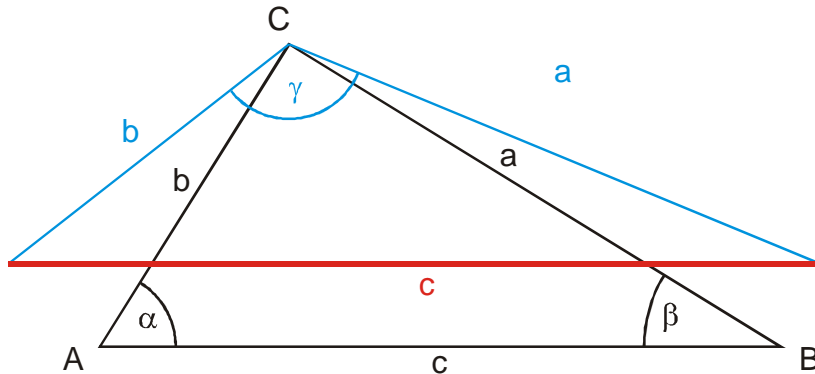
- Pythagorova věta je speciální případ věty kosinové pro pravoúhlý trojúhelník.
- Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy pro obecný trojúhelník.

**Dodatek:** Předchozí příklad můžeme ještě rozvinout následující úvahou.

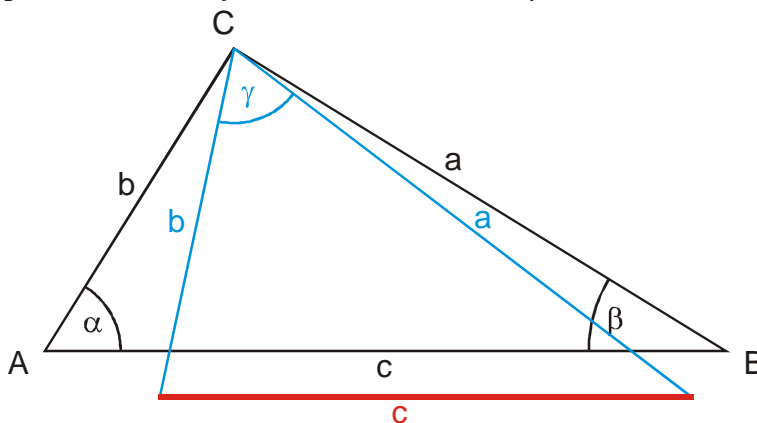
Pro pravoúhlý trojúhelník platí  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $\gamma = 90^\circ$ .



Zvětšíme úhel  $\gamma$  tak, aby platilo  $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ . Pro výpočet  $c$  musíme použít kosinovou větu:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ . Ve vzorci přibyl výraz  $-2ab \cos \gamma$ , protože pro  $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$ , platí  $\cos \gamma < 0 \Rightarrow$  výraz  $-2ab \cos \gamma$  je kladný  $\Rightarrow c$  vyjde větší než u pravoúhlého trojúhelníku. To samé napoví obrázek, ve kterém ponecháme strany  $a, b$  a zvětšíme úhel  $\gamma$ .



Zmenšíme úhel  $\gamma$  tak, aby platilo  $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ . Pro výpočet  $c$  musíme použít kosinovou větu:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ . Ve vzorci přibyl výraz  $-2ab \cos \gamma$ , protože pro  $\gamma \in (0^\circ; 90^\circ)$ , platí  $\cos \gamma > 0 \Rightarrow$  výraz  $-2ab \cos \gamma$  je záporný  $\Rightarrow c$  vyjde menší než u pravoúhlého trojúhelníku. To samé napoví obrázek, ve kterém ponecháme strany  $a, b$  a zmenšíme úhel  $\gamma$ .



**Př. 5:** Trojúhelník  $ABC$  má délky stran 4, 5, 6. Urči velikosti jeho vnitřních úhlů.

Označíme si strany libovolným způsobem, například  $a = 4$ ,  $b = 5$  a  $c = 6$ .

Pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel, například úhel  $\alpha$ .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 41^\circ 25'$$

Další úhly bychom mohli určit pomocí kosinové věty, ale jednodušší bude použití věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Určíme úhel  $\gamma$ :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{c}{a} \sin \alpha = \frac{6}{4} \sin 41^\circ 25' = 0,992$$

$$\gamma_1 = 82^\circ 49'$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 = 180 - 82^\circ 49' = 97^\circ 11'$$

Dopočítáme úhel  $\beta_1$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta_1 = 180^\circ - (41^\circ 25' + 82^\circ 49') = 55^\circ 46'$$

Dopočítáme úhel  $\beta_2$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta_2 = 180^\circ - (41^\circ 25' + 97^\circ 11') = 41^\circ 24'$$

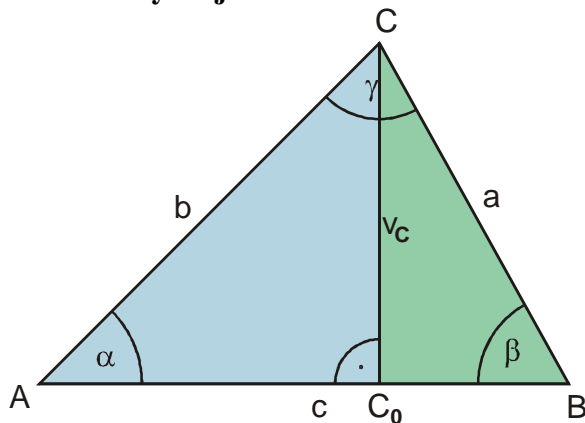
Strana  $b$  je větší než strana  $a$  proto i úhel  $\beta$  musí být větší než úhel  $\alpha \Rightarrow$  toto není řešení zadaného příkladu.

V trojúhelníku  $ABC$  platí:  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ ,  $\alpha = 41^\circ 25'$ ,  $\beta = 55^\circ 46'$ ,  $\gamma = 82^\circ 49'$ .

Důkaz kosinové věty bude mít opět tři části pro různé druhy trojúhelníků.

Budeme dokazovat tvar  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

### 1. ostroúhlý trojúhelník:



Z pravoúhlého trojúhelníku  $BCC_0$  víme:  $a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2$ .

Výraz na pravé straně musíme napsat pomocí  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $\alpha$ .

**Určíme  $|BC_0|$ :** platí:  $|BC_0| = c - |AC_0|$ , z pravoúhlého trojúhelníku  $ACC_0$ :

$$\cos \alpha = \frac{|AC_0|}{b} \Rightarrow |AC_0| = b \cdot \cos \alpha, \text{ tedy } |BC_0| = c - b \cdot \cos \alpha.$$

**Určíme  $|CC_0|$ :** z pravoúhlého trojúhelníku  $ACC_0$ :  $\sin \alpha = \frac{|CC_0|}{b} \Rightarrow |CC_0| = b \cdot \sin \alpha$ ,

tedy  $|CC_0| = b \cdot \sin \alpha$ .

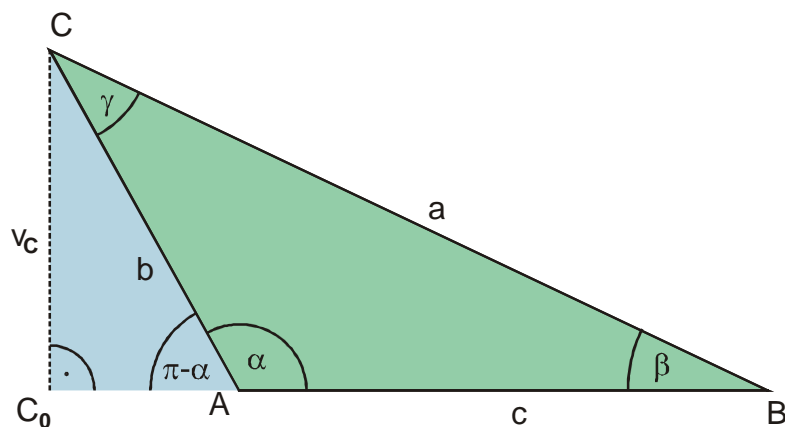
**Dosadíme:**

$$\begin{aligned} a^2 &= |CC_0|^2 + |BC_0|^2 = (b \cdot \sin \alpha)^2 + (c - b \cdot \cos \alpha)^2 = b^2 \cdot \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= b^2 \cdot \sin^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ &= b^2 \cdot 1 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

### 2. pravoúhlý trojúhelník

Už máme dokázáno v úvaze o porovnání Pythagorovy věty a kosinové věty.

### 3. tupoúhlý trojúhelník:



Z pravoúhlého trojúhelníku  $BCC_0$  víme:  $a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2$ .

Výraz na pravé straně musíme napsat pomocí  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $\alpha$ .

**Určíme  $|BC_0|$ :** platí:  $|BC_0| = c + |AC_0|$ , z pravoúhlého trojúhelníku  $ACC_0$ :

$\cos(\pi - \alpha) = \frac{|AC_0|}{b} \Rightarrow |AC_0| = b \cdot \cos(\pi - \alpha)$ . Pomocí součtových vzorců:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \sin \pi \sin \alpha = (-1) \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$$

$$|AC_0| = -b \cdot \cos \alpha, \text{ tedy } |BC_0| = c + |AC_0| = c + (-b \cdot \cos \alpha) = c - b \cdot \cos \alpha.$$

**Určíme  $|CC_0|$ :** z pravoúhlého trojúhelníku  $ACC_0$ :

$\sin(\pi - \alpha) = \frac{|CC_0|}{b} \Rightarrow |CC_0| = b \cdot \sin(\pi - \alpha)$ . Pomocí součtových vzorců:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \cdot \sin \alpha = \sin \alpha,$$

tedy  $|CC_0| = b \cdot \sin \alpha$ .

**Dosadíme:**

$$a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2 = (b \cdot \sin \alpha)^2 + (c - b \cdot \cos \alpha)^2 = b^2 \cdot \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= b^2 \cdot \sin^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$= b^2 \cdot 1 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

**Př. 6:** Petáková:

strana 49/cvičení 76 a) b) c)

strana 49/cvičení 82

strana 49/cvičení 86 a)

**Shrnutí:** Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy.