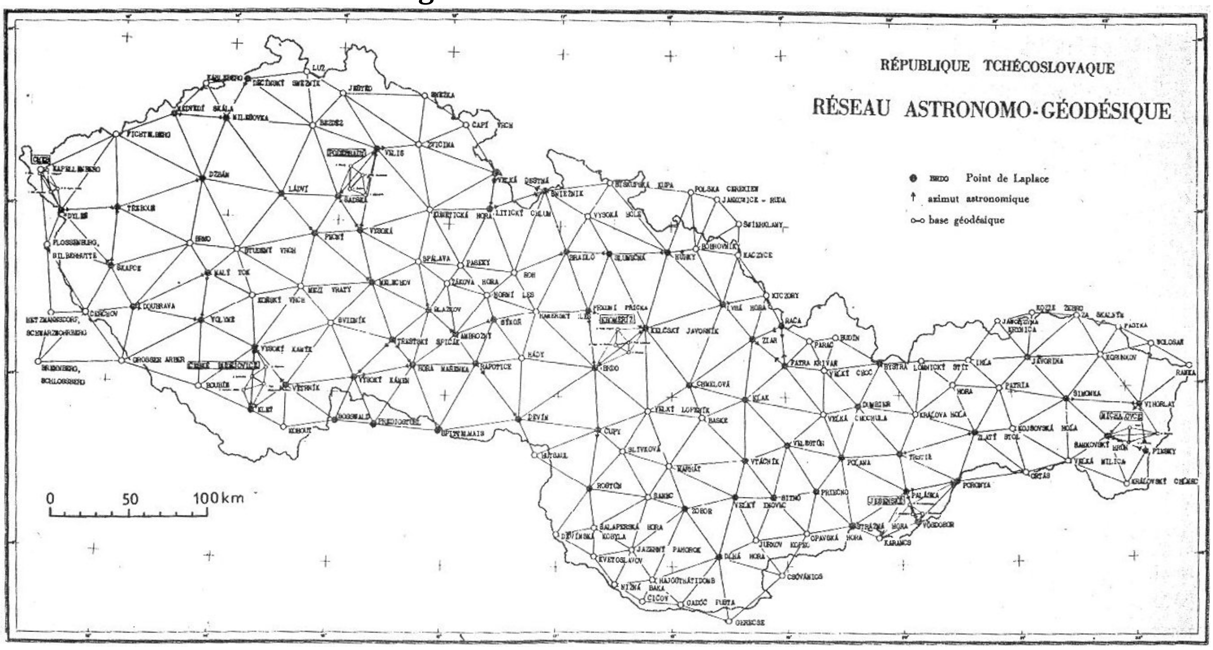
4.4.1 Sinová věta

Předpoklady:

Trigonometrie: řešení úloh o trojúhelnících.

Praktické využití: zaměřování a měření vzdáleností, triangulační síť
Triangulační síť: je problém měřit vzdálenosti dvou bodů v krajině $\Rightarrow$ změříme velmi pečlivě vzdálenost dvou bodů a z nich vztyčíme trojúhelníky (s vrcholy na viditelných místech), v trojúhelnících dopočítáme velikosti stran $\Rightarrow$ získáme síť trojúhelníků, které pokrývají nějaké území a jejichž vrcholy nám umožňují zaměřit libovolný další bod v krajině.
Československá astronomicko geodetická síť z roku 1955



Celá síť stojí na změření 6 vzdáleností (geodetických základen) a 681 úhlů v 227 trojúhelnících.

Problém: Trojúhelníky nejsou obecně pravoúhlé $\Rightarrow$ zatím je nedokážeme dopočítat $\Rightarrow$ musíme najít vzorce pro obecné trojúhelníky.

Zatím máme vzorce pouze pro pravoúhlé trojúhelníky:

- Pythagorova věta,
- Definice goniometrických funkcí.

$\Rightarrow$ zkusíme najít jejich obdoby pro obecný trojúhelník.

Sinová věta:
Pro každý trojúhelník *ABC*, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky *a*, *b*, *c* platí : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Pokyny pro numerické výpočty:

- Ve všech dalších příkladech počítej úhly s přesností na minuty, délky s přesností na dvě desetinná čísla.

- Všechny hodnoty počítej, pokud je to možné, z hodnot určených v zadání.
- Všechny vztahy uprav do tvaru, kdy vyjádříš proměnnou, kterou potřebuješ určit, a vzniklý vztah zadávej do kalkulátoru najednou.

Př. 1: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 10$, $\beta = 100°$, $\gamma = 50°$.

Nejdříve určíme úhel α (potřebujeme úhel pro straně *a*):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (100° + 50°) = 30°$$

Teď můžeme použít sinovou větu:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 100°}{\sin 30°}\cdot 10 = 19,70$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 50°}{\sin 30°}\cdot 10 = 15,32$$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 10$, $b = 19,70$, $c = 15,32$, $\alpha = 30°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 50°$.

Poznámka: Úhly udané v minutách (případně i vteřinách) zadáváme do většiny kalkulaček pomocí tlačítka °'", například pro $\sin 30°15'44''$ takto: [redacted].
V nejhorším případě je možné i převádění minut na stupně dělením 60.

Př. 2: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $b = 51,23$, $\alpha = 61°28'$, $\gamma = 8°13'$.

Nejdříve určím úhel β (potřebujeme úhel pro straně *b*):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (61°28' + 8°13') = 110°19'$$

Teď můžeme použít sinovou větu:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot b = \frac{\sin 61°28'}{\sin 110°19'}\cdot 51,23 = 47,99$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot b = \frac{\sin 8°13'}{\sin 110°19'}\cdot 51,23 = 7,81$$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 47,99$, $b = 51,23$, $c = 7,81$, $\alpha = 61°28'$, $\beta = 110°19'$, $\gamma = 8°13'$.

Př. 3: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 6,1$, $b = 7,2$, $\alpha = 55°$.

Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel pro straně *b*).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{7,2}{6,1}\sin 55° \doteq 0,96687 \ \Rightarrow \beta = 75°13'$$

Dopočítáme úhel γ:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (55° + 75°13') = 49°47'$$

Teď můžeme určit *c*:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 49°47'}{\sin 55°}\cdot 6,1 = 5,69$$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a=6{,}1$, $b=7{,}2$, $c=5{,}69$, $\alpha=55°$, $\beta=75°13'$, $\gamma=49°47'$.

Uvedené řešení předchozího příkladu není správné!!!!! Zadání vyhovuje také trojúhelník $a=6{,}1$**,** $b=7{,}2$**,** $c_2=2{,}57$**,** $\alpha=55°$**,** $\beta_2=104°47'$**,** $\gamma_2=20°13'$**.**

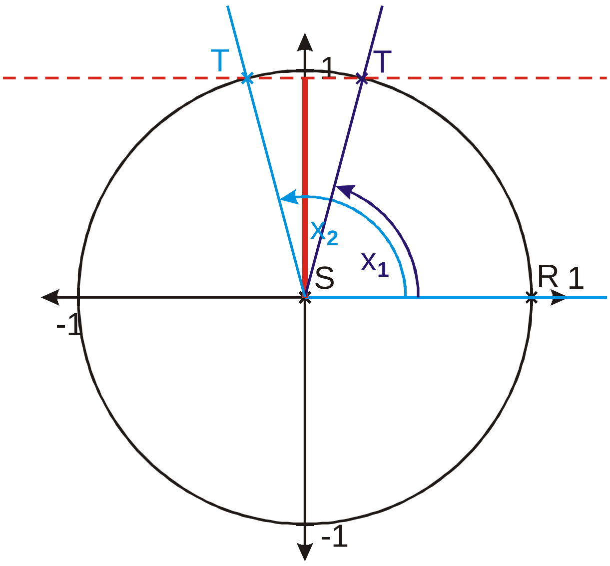
Př. 4: Ověř, že i druhé řešení vyhovuje zadání a najdi v předchozím postupu chybu.

Musí platit součet úhlů v trojúhelníku: $\alpha+\beta+\gamma=180°$.
$55°+104°47'+20°13'=180°$ - platí.
Musí platit sinová věta: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{6{,}1}{\sin 55°}\doteq 7{,}447$ $\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{7{,}2}{\sin 104°47'}\doteq 7{,}447$ $\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{2{,}57}{\sin 20°13'}\doteq 7{,}437$

Všechny výsledky jsou přibližně stejné $\Rightarrow$ jde opravdu o správné řešení.

Kde se stala chyba?
Námi nalezené řešení je správné, ale nenašli jsme druhé $\Rightarrow$ chyba ve chvíli, kdy jsme z hodnoty $\sin\beta$ určovali úhel β.
β je úhel z intervalu $(0;\pi)$. Jak je vidět z jednotkové kružnice, úhly, pro které platí $\sin\beta=0{,}96687$, jsou v intervalu $(0;\pi)$ dva $\Rightarrow$ musíme počítat s oběma.



Př. 5: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a=6{,}1$; $b=7{,}2$; $\alpha=55°$. Najdi všechna řešení příkladu.

Tentokrát to zkusíme správně.
Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel pro straně *b*).

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}\Rightarrow \sin\beta=\dfrac{b}{a}\cdot\sin\alpha=\dfrac{7{,}2}{6{,}1}\sin 55°\doteq 0{,}96687$

Úhly s touto hodnotou sinu mohou existovat dva $\Rightarrow$ musíme zkoumat oba.

$\beta_1=75°13'$

Dopočítáme úhel γ_1:

$\beta_2=180°-\beta_1=180-75°13'=104°47'$

Dopočítáme úhel γ_2:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \gamma=180°-(\alpha+\beta)$

$\gamma_1=180°-(55°+75°13')=49°47'$

Teď můžeme vypočítat c_1:

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$

$c_1=\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\cdot a=\frac{\sin 49°47'}{\sin 55°}\cdot 6,1=5,69$

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \gamma=180°-(\alpha+\beta)$

$\gamma_2=180°-(55°+104°47')=20°13'$

Teď můžeme vypočítat c_2:

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$

$c_2=\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha}\cdot a=\frac{\sin 20°13'}{\sin 55°}\cdot 6,1=2,57$

Příklad má dvě řešení:
1) $a=6,1$, $b=7,2$, $c_1=5,69$, $\alpha=55°$, $\beta_1=75°13'$, $\gamma_1=49°47'$.
2) $a=6,1$, $b=7,2$, $c_2=2,57$, $\alpha=55°$, $\beta=104°47'$, $\gamma=20°13'$.

Př. 6: V trojúhelníku jsou dány dvě strany (o velikostech 8,7 a 5,3) a úhel proti větší z nich ($85°35'$). Urči všechny strany a úhly v trojúhelníku.

Při výpočtu budeme používat vzorce $\Rightarrow$ můžeme si ulehčit práci pojmenováním stran.
Strany si můžeme pojmenovat libovolně, například $a=8,7$, $b=5,3$. Zadaný úhel má ležet proti delší ze zadaných stran $\Rightarrow$ leží proti straně *a* $\Rightarrow$ $\alpha=85°35'$.
Nejdříve určím úhel β (potřebujeme úhel pro straně *b*).

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta=\frac{b}{a}\cdot\sin\alpha=\frac{5,3}{8,7}\sin 85°35' \doteq 0,607386$

Úhly s touto hodnotou sinu mohou existují dva $\Rightarrow$ musíme využít oba.

$\beta_1=37°24'$

Dopočítáme úhel γ_1:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \gamma=180°-(\alpha+\beta)$

$\gamma_1=180°-(85°35'+37°24')=57°1'$

Teď můžeme vypočítat c_1:

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$

$c_1=\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\cdot a=\frac{\sin 57°1'}{\sin 85°35'}\cdot 8,7=7,32$

$\beta_2=180°-\beta_1=180-37°24'=142°36'$

Dopočítáme úhel γ_2:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \gamma=180°-(\alpha+\beta)$

$\gamma_2=180°-(85°35'+142°36')=-48°11'$

Záporný úhel není možný $\Rightarrow$ příklad má jediné řešení.

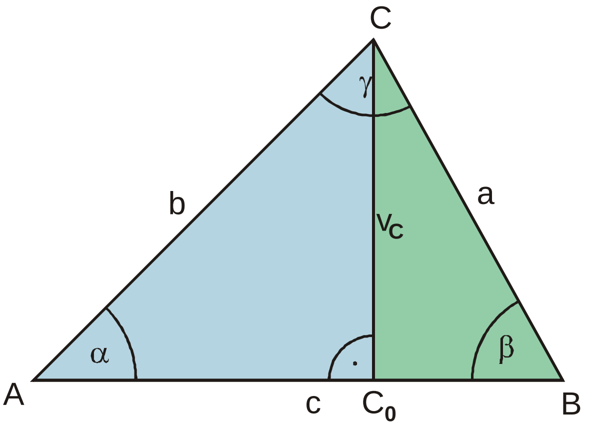
Příklad má jedno řešení: $a=8,7$, $b=5,3$, $c=7,32$, $\alpha=85°35'$, $\beta=37°24'$, $\gamma=57°1'$.

Př. 7: Najdi důvod, proč autor zvolil označení stran v předchozím příkladě právě tímto způsobem.

Důvod není matematický, ale souvisí s používáním počítačů. Jelikož dva předchozí příklady jsou stejné a liší se jen dosazením. Mohli jsme získat poslední příklad pouhým zkopírováním a přepsáním hodnot.

Sinová věta si koleduje o důkaz, nejdříve zkusíme vztah $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$.

Máme ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Sestrojíme výšku v_C, její patu označíme C_0. Vzniknou dva další trojúhelníky - ACC_0 (modrý) a BCC_0 (zelený) oba pravoúhlé $\Rightarrow$ s nimi umíme počítat.



V obou trojúhelnících vyjádříme velikost výšky v_C.

- trojúhelník ACC_0 (modrý): $\sin\alpha = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = \sin\alpha \cdot b$,
- trojúhelník BCC_0 (zelený): $\sin\beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin\beta \cdot a$.

Oba výrazy pro v_C se musejí rovnat: $v_C = \sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$.

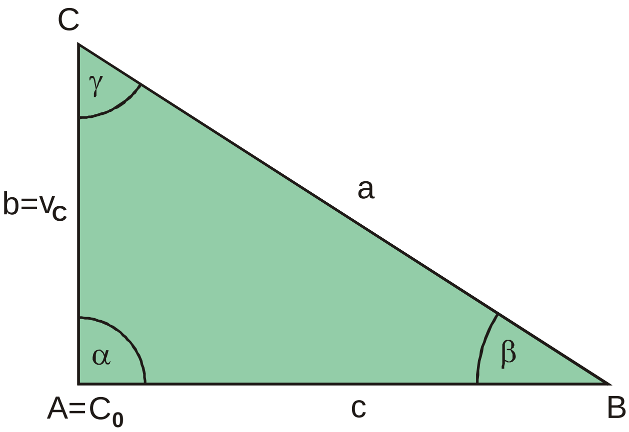
$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a \qquad / : (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ (to jsme měli dokázat)

Platí toto odvození vždy?
Platí pouze pro úhly $\alpha < 90°$ (aby situace odpovídala obrázku).

Př. 8: Proveď důkaz platnosti vzorce $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, když platí $\alpha = 90°$.

Nakreslíme obrázek:



Modrý trojúhelník zmizel, ale platí: $v_C = b$.

Trojúhelník BCC_0 (zelený): $\sin\beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin\beta \cdot a$.

Důkaz se zdaří, když bude platit: $v_C = b = \sin\alpha \cdot b$. Víme, že platí:

$v_C = b = 1 \cdot b = \sin\alpha \cdot b$, protože $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

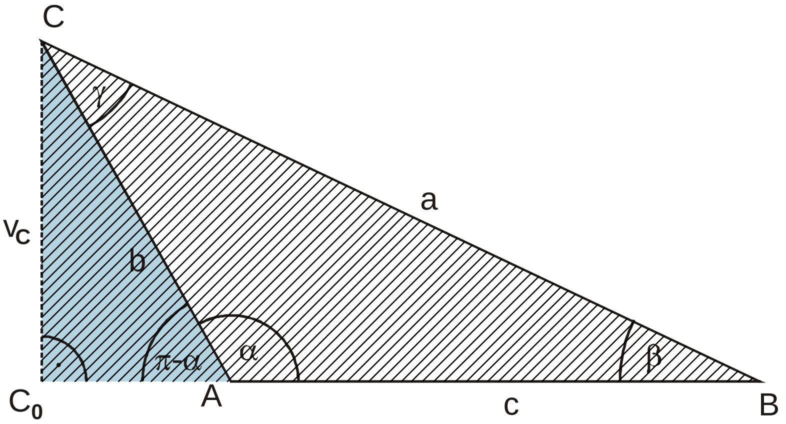
Oba výrazy pro v_C se musejí rovnat: $v_C = \sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$.

$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a \quad / : (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ (to jsme měli dokázat)

Př. 9: Proveď důkaz platnosti vzorce $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, když platí $180° > \alpha > 90°$.

Nakreslíme obrázek:



Modrý trojúhelník částečně překrývá trojúhelník šrafovaný (původně zelený).

- trojúhelník ACC_0 (modrý): $\sin(\pi - \alpha) = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = \sin(\pi - \alpha) \cdot b$,
- trojúhelník BCC_0 (šrafovaný): $\sin\beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin\beta \cdot a$.

Potřebujeme $\sin\alpha$, ne $\sin(\pi - \alpha)$.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha - (-1)\sin\alpha = \sin\alpha \Rightarrow$ tedy: $v_C = \sin\alpha \cdot b$.

Oba výrazy pro v_C se musejí rovnat: $v_C = \sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$.

$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a \quad / : (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$

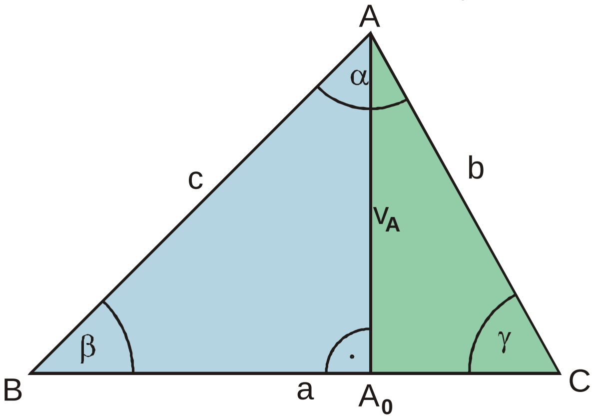
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ (to jsme měli dokázat)

Žádna další možnost velikosti úhlu α není $\Rightarrow$ vztah $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ jsme dokázali pro všechny obecné trojúhelníky.

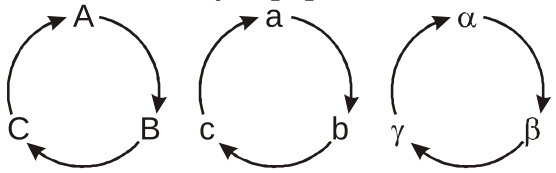
Postřeh: Tímto jsem fakticky dokázal i platnost vztahů $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ a $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Při kreslení obrázku nezáleželo na tom, jakým písmenem si strany, se kterými jsme pracovali, označíme $\Rightarrow$ stačí změnit označení vrcholů a dokážeme místo rovnosti $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ jednu ze zbývajících dvou rovností.

Př. 10: Nakresli obrázek pro první část důkazu tak, aby z ní vyplynula rovnost $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

Prohodíme označení vrcholů tak, aby vrchol A byl nahoře.



Zaměňování vrcholů se u trojúhelníků používá často, postup se nazývá cyklická záměna a v tabulkách bývá popisován těmito schématy:



Vzorec $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ získáme ze vzorce $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ tak, že se posuneme ve směru šipek o jeden znak dále.

Př. 11: Ve větě o obecném trojúhelníku vystupují vrcholy A a B, strana a a úhel γ. Pomocí cyklické záměny urči, které vrcholy a strany budou vystupovat ve větě s úhlem β.

Úhel β získáme z úhlu γ posunutím o dva kroky (o dvě šipky) $\Rightarrow$ posuneme všechno o dva kroky $\Rightarrow$ ve větě budou vystupovat vrcholy C a B, strana c a úhel β.

Poznámka: Při formulaci věty se také můžeme zcela obejít bez pojmenovávání stran, úhlů nebo vrcholů. Například sinová věta může být vyslovena takto:
Pro každý trojúhelník platí, že poměr strany a sinu protějšího úhlu je vždy stejný.

Př. 12: Petáková:
strana 49/cvičení 75 b) c)
strana 49/cvičení 79

Shrnutí: