

4.3.8 Vzorce pro součet goniometrických funkcí

Vzorce pro součet goniometrických funkcí:

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

Př. 1: Uprav na součin výrazy.

a) $\sin 2x + \sin 4x$

b) $\cos 5a + \cos 3a$

c) $\sin 3x - \sin(x + \pi)$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

Př. 2: Urči definiční obor výrazu $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ a pak jej zjednoduš využitím vzorců pro součet goniometrických funkcí.

Př. 3: Vypočti.

a) $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$

b) $\frac{\cos 70^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sin 5x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Př. 5: Vyřeš rovnici $\sin 5x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Vzorce pro součet goniometrických funkcí se odvozují ze součtových vzorců, na základě

následujících rovností: $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

$$\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního sinu vzorec $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$:

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřek druhého sinu vzorec $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$:

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme: $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

Př. 7: (BONUS) Odvoď vzorec pro $\cos x + \cos y$.

$$\cos x + \cos y = \cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního cosinu vzorec $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$:

$$\cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřky druhého sinu vzorec $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$:

$$\cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme: $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

Př. 8: Petáková:

strana 47, cvičení 60 a), e)

strana 54, cvičení 21 c), e)

strana 54, cvičení 22 a)