4.3.8 Vzorce pro součet goniometrických funkcí

Vzorce pro součet goniometrických funkcí:

- $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$
- $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

Př. 1: Uprav na součin výrazy.

a) $\sin 2x+\sin 4y$

b) $\cos 5a+\cos 3a$

c) $\sin 3x-\sin(x+\pi)$

d) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

Př. 2: Urči definiční obor výrazu $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ a pak jej zjednoduš využitím vzorců pro součet goniometrických funkcí.

Př. 3: Vypočti.

a) $\sin 105°-\sin 15°$

b) $\frac{\cos 70°-\cos 10°}{\sin 70°+\sin 10°}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sin 5x=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Př. 5: Vyřeš rovnici $\sin 5x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.

Vzorce pro součet goniometrických funkcí se odvozují ze součtových vzorců, na základě následujících rovností: $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$, $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$.

$$\sin x+\sin y=\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního sinu vzorec $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$:

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřek druhého sinu vzorec $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$:

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme: $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Př. 7: (BONUS) Odvoď vzorec pro $\cos x+\cos y$.

$$\cos x+\cos y=\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního cosinu vzorec $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$:

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřky druhého sinu vzorec $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$:

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme: $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Př. 8: Petáková:
strana 47, cvičení 60 a), e)
strana 54, cvičení 21 c), e)
strana 54, cvičení 22 a)